主 编
副主编

大学生数学竞赛及研究生入学考试辅导



机械工业出版社
China Machine Press

★ISBN 7-111-10360-2/O·216



封面设计／电脑制作： 陈沛

ISBN 7-111-10360-2

9 787111 103608 >

定价：15.00元

地址：北京市百万庄大街22号 邮政编码：100037
联系电话 (010) 68326294 网址 http://www.cmpbook.c
E-mail:online@cmpbook.co

大学生数学竞赛及研究生入学考试辅导

主　编　桂文豪
副主编　邵吉光
参　编　何卫力
主　审　季文铎

机 械 工 业 出 版 社

本书是主要面对基础比较好的大学生、数学爱好者提高数学素质和技能，参加数学竞赛以及研究生入学考试的学习指导书。全书以专题形式论述，将相关知识放进一个专题，提高分析问题和解决问题的能力，开拓视野、活跃思路。

全书由极限、微积分中值定理、不等式、反向思考方法、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、函数方程与微分方程、数学专题选讲、附录等章节组成。编写时力求应用性强，适用面广；文字简明通顺；加大信息量。本书不是历届竞赛题的简单解答，而是把重点放在阐述解题思路和方法上。

图书在版编目（CIP）数据

大学生数学竞赛及研究生入学考试辅导/桂文豪主编.
—北京：机械工业出版社，2002.6
ISBN 7-111-10360-2

Ⅰ.大… Ⅱ.桂… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料②高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 036132 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：余茂祚
封面设计：陈　沛　责任印制：路　琳
中国建筑工业出版社密云印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002 年 6 月第 1 版·第 1 次印刷
890mm×1240mm A5·6.5 印张·191 千字
0001－5000 册
定价：15.00 元

前　言

本书是主要面对基础比较好的大学生、数学爱好者提高数学素质和技能，参加数学竞赛以及研究生入学考试的学习指导书。

大学生数学竞赛一直是各高校的一项重要的学术活动。它对于提高学生的数学技能和素质，选拔优秀人才起到了重要的作用。北京市、上海市、广东省、陕西省、浙江省、黑龙江省等全国大部分省市一直高度重视该项活动。

在编写本书时，我们注意到针对该项竞赛的辅导材料比较少，很多资料还停留在普通的高等数学辅导上面，读者对象也一般为大学成绩中等的学生。另外，许多资料只是将历届试题按年代次序给出参考解答，没有从方法角度进行阐述。这样有可能使学生陷进题海战术，得不到方法要领。为此，我们编写了这本辅导书。其目的是从方法的角度展现大学数学竞赛的内涵，以专题形式论述，将相关知识放进一个专题，让学生对该专题内容和方法有深刻的领悟；帮助学生总结解题规律，提高分析问题和解决问题的能力，开拓视野、活跃思路。

本书以专题的形式编写，例题解析中的题目一般都是比较典型的竞赛或研究生入学真题。自我检测题突出学生对该专题的理解和应用，通过做自我检测题，可使他们加深对知识的掌握。对于方法小结，力求系统阐述该专题知识的内在联系，从而有助于学生更好地巩固该专题的知识。

编写时力求应用性强，适用面广；文字简明通顺；加大信息量。本书不是历届竞赛题的简单解答，而是把重点放在阐述解题思路和方法上。

本书由北方交通大学桂文豪任主编，他提出了全书的总体构思及编写的指导思想和应注意事项。本书编写的具体分工如下，第 1 章、第 2 章、第 5 章、第 8 章由桂文豪编写；第 3 章、第 4 章、第 7 章、第 9 章由邵吉光编写；第 6 章、附录由何卫力编写。最后由桂文豪和

邵吉光统稿修订。

本书由北京市数学会季文铎教授主审，季老师一直负责北京市大学生数学竞赛的组织工作，他认真、仔细地审阅了全稿，并提出了许多宝贵的修改意见，对此表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中，得到作者所在单位的大力支持和帮助，柳金甫教授、陈治中教授、管克英教授、张后扬教授、赵达夫教授、刘晓教授、付俐教授、修乃华教授等一直给予了具体的指导，吴海燕女士、刘颖女士也给予了很大的帮助。另外，机械工业出版社的研究员级高级工程师余茂祚编辑对本书的出版付出了很大的心血，在此一并表示感谢。

由于我们的水平有限，书中难免有缺点和不当之处，敬请专家、同仁和广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第1章 极　　限

1.1 内容提要

极限是高等数学的基础，也是高等数学中比较困难的问题之一。主要的问题是求极限和证明极限的存在。

通常我们把极限分为数列极限和函数的极限。这两种极限，有深刻的内在联系，有许多类似的解决方法。

数列极限的定义，数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限是指，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$。可以用极限的定义来证明极限，这一般应找到最小的 N，其方法主要有放大法，分步讨论法等。用定义证明极限存在，有一个前提条件，需要事先知道极限的值。但通常极限值不清楚，如何依据表达式求出极限，只能根据每道题进行分析。一般用得比较多的方法有，**初等变形**、**夹逼法则**、**单调有界法**、**定积分定义法**、**施笃兹(stolz)公式**等。

1.2 例题解析

例1　计算极限 $\lim\limits_{m,n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i+j}}{i+j}$。

分析　可以将求和号后面内容写成定积分的形式，考虑级数部分和，利用积分性质和几何级数求和，并注意求和号次序的化简。

解　因为 $\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\mathrm{d}x=-\dfrac{(-1)^{i+j}}{i+j}$，所以部分和

$$S_{m,n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{-1}^{0}x^{i+1-1}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x^{i+2-1}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{-1}^{0}x^{i+n-1}\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}(x^{i}+x^{i+1}+x^{i+2}+\cdots+x^{i+n-1})\mathrm{d}x$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^{i}(1-x^{n})}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^{i}-x^{i-n}}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-1}^{0}\frac{(x^{1}-x^{1+n})+(x^{2}-x^{2+n})+\cdots+(x^{m}-x^{m+n})}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-1}^{0}\frac{x^{1}+x^{2}+\cdots+x^{m}}{1-x}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots+x^{n+m}}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-1}^{0}\frac{x-x^{m+1}}{(1-x)^{2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{x^{n+1}-x^{n+m+1}}{(1-x)^{2}}\mathrm{d}x$$

下面先证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{x^{t}}{(1-x)^{2}}\mathrm{d}x=0$，事实上，因为 $x\in[-1,0]$，所以 $(1-x)^{2}\geqslant 1$。$\int_{-1}^{0}\frac{x^{t}}{(1-x)^{2}}dx\leqslant\int_{-1}^{0}x^{t}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{t+2}}{t+1}\to 0$，当 $t\to+\infty$ 时。

于是，$\lim\limits_{m,n\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=\lim\limits_{m,n\to+\infty}S_{m,n}$

$$= -\int_{-1}^{0}\frac{x}{(1-x)^{2}}\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}$$

例 2 设 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x)>0$，$f(0)=f'(0)=0$，试求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int_{0}^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t}$，其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距。

分析 当 $x\to 0+$ 时，所求极限为 $0/0$ 型未定式，可考虑用洛必达法则，因此要对变上限的定积分函数求导，所以先要求出 $u(x)$ 及 $u'(x)$，进而可利用 $f(x),f'(x)$ 的泰勒公式求得极限。

解 由导数的几何意义，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$，求此切线在 x 轴上的截距。

令 $Y=0$，则 $X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

于是得到　$u(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，$u'(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ 又对于 $f(x)$，由泰勒公式有

$$f(x)=f''(0)x^2/2+o(x^2),\quad f'(x)=f''(0)x+o(x)$$

所以 $u(x)=x-\dfrac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{f''(0)x+o(x)}\sim x-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}x\quad (x\to 0+)$

于是，$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int_0^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f[u(x)]u'(x)}{f(x)}$

$$=\lim_{x\to 0+}\left[\frac{[\frac{1}{2}f''(0)u^2(x)+o(x^2)]}{f(x)}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{[\frac{1}{2}f''(0)u^2(x)+o(x^2)]f''(x)}{[f''(0)x+o(x)]^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{[\frac{1}{2}f''(0)(\frac{x}{2})^2+o(x^2)]f''(x)}{[f''(0)x+o(x)]^2}=\frac{1}{8}$$

例 3　设 $f(x,y)$ 是定义在区域 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$ 上的二元函数，$f(0,0)=0$，且在点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 可微，求极限

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-x^4/4}}$$

分析　先对分子上的积分变换次序，然后用洛必达法则，再对分子用中值定理，化简后，再对分子使用二元函数的一阶泰勒公式，即可求出其极限。

解　交换积分次序

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u=\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\,\mathrm{d}t$$

从而原式$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int_0^x dt\int_0^{u^2} f(t,u)\,dt}{1-e^{-x^4/4}}$

$$=-\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2} f(t,x)\,dt}{x^3 e^{-x^4/4}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2 f(\xi,x)}{x^3}$$

$$=-\lim_{x\to 0+}\frac{f(\xi,x)}{x}, \qquad (0<\xi<x^2)$$

因为二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，且 $f(0,0)=0$ 及 $0<\xi<x^2$，所以

$$f(\xi,x)=f(0,0)+f'_x(0,0)\xi+f'_y(0,0)x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})$$

$$=f'_y(0,0)x+o(x)$$

故原式$=-\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f'_y(0,0)x+o(x)}{x}=-f'_y(0,0)=-\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$

例 4 设 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 上非负的连续函数，且严格单调增加，由积分中值定理知，对任意的正整数 n，存在惟一的 $x_n\in(a,b)$，使 $[f(x_n)]^n=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx$

试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，并证明你的结论。

分析 若设 $f(x)=x$，$[a,b]=[0,1]$，满足题目所给条件，不难计算出 $x_n\to 1(n\to\infty)$。因此可启发我们得出结论 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，这种以特殊情况猜测一般结论再进行严格证明的方法在不少讨论性题目中是有用的。

证明 由所给等式易得

$$1=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(x_n)}\right]^n dx\geqslant\frac{1}{b-a}\int_{\frac{x_n+b}{2}}^b\left[\frac{f(x)}{f(x_n)}\right]^n dx$$

由于 $f(x)$ 单调增加，所以有

$$1\geqslant\frac{1}{b-a}\int_{\frac{x_n+b}{2}}^b\left[\frac{f(x)}{f(x_n)}\right]^n dx\geqslant\frac{b-x_n}{2(b-a)}\left[\frac{f(\frac{x_n+b}{2})}{f(x_n)}\right]^n$$

从而 $b-x_n \leqslant 2(b-a)[\dfrac{f(x_n)}{f(\frac{x_n+b}{2})}]^n$

由于$(x_n+b)/2 \geqslant x_n$以及$f(x)$单调增加，故$\dfrac{f(x_n)}{f((x_n+b)/2)} \leqslant 1$。

于是我们可以推测$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$，但由于$\dfrac{f(x_n)}{f((x_n+b)/2)}$和$n$有关，必须给出证明。下面用反证法证明。假设断言不成立，则存在$\varepsilon_0>0$，存在$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{n_k}\}$和正整数K，使得当$k \geqslant K$时，就有$b-x_{n_k}>\varepsilon_0$，如此就得到

$$1=\frac{1}{b-a}\int_a^b[\frac{f(x)}{f(x_{n_k})}]^n \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon_0/2}^b[\frac{f(x)}{f(x_{n_k})}]^{n_k}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon_0}{2(b-a)}[\frac{f(b-\varepsilon_0/2)}{f(x_{n_k})}]^{n_k} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2(b-a)}[\frac{f(b-\varepsilon_0/2)}{f(b-\varepsilon_0)}]^{n_k}$$

由于$f(b-\varepsilon_0/2)>f(b-\varepsilon_0)$，且此式在$k$充分大后与$k$无关，所以当$k\to+\infty$时，$[\dfrac{f(b-\varepsilon_0/2)}{f(b-\varepsilon_0)}]^{n_k}\to+\infty$，得到$1\geqslant+\infty$，矛盾，于是断言成立。

例 5 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2})$

分析 解这种类型的题一般有两种方法，一是用夹逼定理，二是化为定积分和式。本题求极限内容和定积分定义形式相近，可以试试化成定积分来求。

解 $S_n=\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2})$

$$=\frac{1}{n}[\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2}+\sqrt{1-(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\sqrt{1-(\frac{n-1}{n})^2}]$$

$$=\frac{1}{n}[\sqrt{1-(\frac{0}{n})^2}+\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2}+\cdots+\sqrt{1-(\frac{n-1}{n})^2}]-\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1-(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n}$$

注意到$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{1-(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\pi/4$$

例 6 计算$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}]$

分析 本题是夹逼定理和化定积分方法的结合，先用夹逼定理，而夹逼的左右两边再化为定积分的和式。

解 由于$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+i/n}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}$

所以 $$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+i/n}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n})=\frac{\pi}{2}$$

于是由夹逼定理知原式极限为$\pi/2$。

例 7 设C为实数，函数$f(x)$满足下列两个等式，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=C,\quad \lim_{x\to\infty}f'''(x)=0$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$

分析 在题设中给出一个函数二阶和二阶以上可导的条件时，应该先想到将该函数在某点处展开成泰勒公式。

证明 由泰勒公式有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\qquad x<\xi_1<x+1$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)\qquad x-1<\xi_2<x$$

将上面二式分别相加和相减得到

$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$$

$$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$$

当 $x\to\infty$ 时，我们有 $\xi_1\to\infty$，$\xi_2\to\infty$，于是

$$\lim_{x\to\infty}f''(x)=C+C-2C+\frac{1}{6}\times 0-\frac{1}{6}\times 0=0$$

$$\lim_{x\to\infty}2f'(x)=C-C-\frac{1}{6}\times 0-\frac{1}{6}\times 0=0$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$

例 8 设函数 $f(x)$ 在 $(-L,L)$ 连续，在 $x=0$ 可导，且 $f'(0)\neq 0$，

（1） 求证：对于任意给定的 $0<x<L$，存在 $0<\theta<1$，使 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$

（2） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\theta$。

解 （1）设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0$，$F(x)$ 在 $[0,x]$ 可微，由拉格朗日中值定理得到

$$F(x)-F(0)=F'(\theta x)x,\ 0<\theta<1$$

即 $$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

（2）由（1）可得

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{2x^2}=\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\cdot\theta$$

令 $x\to 0+$，由 $f(0)$ 存在，且 $f'(0)\neq 0$，得上式的

左端$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(-x)}{4x}=\dfrac{1}{2}f'(0)$

右端$=\lim\limits_{x\to 0+}[\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\cdot\theta]=f'(0)\lim\limits_{x\to 0+}\theta$

故 $\lim\limits_{x\to 0+}\theta=1/2$

例 9 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，求极限

$$\lim_{t\to0+}\frac{1}{t^3}\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-x^2-y^2}$ 。

分析 对于积分中被积函数或其主要部分为复合函数，可以考虑先做变量替换使之成为简单形式。本题极限是商的形式，可以想到用洛必达法则试试。

解 用球坐标变换计算

$$\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\text{ ,}$$

故 $$\lim_{t\to0+}\frac{1}{t^3}\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to0+}\frac{\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{t^3}$$

$$=\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}f(0)$$

例 10 设连续函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减少，且 $f(x)>0$ ，若 $u_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ ，证明：当 $n\to\infty$ 时，u_n 的极限存在。

分析 证明极限存在方法有两种，一是推测出极限值，并证明该极限；二是可以考虑用单调有界必有极限定理，证明极限存在。另外出现在题设或解题过程中出现积分式时，可以试着用积分中值定理对积分式处理一下再说。

证明 $$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\sum_{k=1}^{n}f(k)$$

$$-\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$=f(n+1)-f(\xi)$ ，$\xi\in(n,n+1)$

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续且单调减少，故由 $n<\xi<n+1$ 得，$f(n+1)<f(\xi)$ 。从而 $u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(\xi)<0$ ，
即 $\{u_n\}$ 是单调减少数列，

$$u_n = f(1)+f(2)+\cdots+f(n)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

$$=[f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x]+\cdots+[f(n-1)-\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x]+f(n)$$

$$=[f(1)-f(\xi_1)]+\cdots+[f(n-1)-f(\xi_{n-1})]+f(n)$$

其中$i<\xi_i<i+1\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，

据题设$f(i)-f(\xi_i)>0$，$f(n)>0$，故$u_n>0$，即$\{u_n\}$是单调减少有下界数列，故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在。

例 11 若$a\leqslant f(x)\leqslant b$，$x\in[a,b]$且

$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$，其中$k$为常数，且$0<k<1$，设$x_1\in[a,b]$，$x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：

（1）存在惟一的$x\in[a,b]$，使得$x=f(x)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

分析 证明存在性方法很多，一般来说，和函数有关的可以利用连续函数的介值定理，和导函数有关的可以利用中值定理。

证明 （1）由$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$知$f(x)$连续，所以$g(x)=f(x)-x$连续。

由于$a\leqslant f(x)\leqslant b$，$x\in[a,b]$，所以

$g(a)=f(a)-a\geqslant 0$，$g(b)=f(b)-b\leqslant 0$，

由介值定理知道，$\exists\ x\in[a,b]$，使$g(x)=0$，即$x=f(x)$。

若另有$x_0=f(x_0)$且$x_0\neq x$，则

$|x_0-x|=|f(x_0)-f(x)|\leqslant k|x_0-x|<|x_0-x|$，矛盾。

这就说明，存在惟一的$x\in[a,b]$，使得$x=f(x)$。

（2）$|x_n-x|=|f(x_{n-1})-f(x)|\leqslant k|x_{n-1}-x|\leqslant$

$k^2|x_{n-2}-x|\leqslant\cdots\leqslant k^{n-1}|x_1-x|$，

$k<1$，令$n\to\infty$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|=0$，

从而$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x)=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

例 12 序列$\{x_n\}$对一切m与n满足条件$0\leqslant x_{n+m}\leqslant x_n+x_m$，证明序列$\{x_n/n\}$收敛。

分析 要证明这样一个序列是收敛的，关键是利用条件对x_n/n

进行估计，找出极限，然后进行证明。

证明 首先，由题设条件知 $0 \leqslant x_n \leqslant nx_1\ (n=1,2,\cdots)$，这样就有 $\{x_n/n\}$ 是有界序列，设其下确界是 $\alpha=\inf\{x_n/n\}$，显然 $\alpha \geqslant 0$。

下面，我们证明 α 就是其极限。

任给 $\varepsilon>0$，则存在正整数 m，使得 $\alpha \leqslant x_m/m<\alpha+\varepsilon/2$，对任一自然数 n，将其表成 $n=qm+r$，其中 r 是小于 m 的非负整数，由条件知，$x_n=x_{qm+r} \leqslant qx_m+x_r$

从而有

$$\frac{x_n}{n} \leqslant \frac{qx_m+x_r}{qm+r}=\frac{x_m}{m}\cdot\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n}$$

故有（当 n 很大时）

$$-\frac{\varepsilon}{2}+\alpha \leqslant \frac{x_n}{n}<(\alpha+\frac{\varepsilon}{2})\cdot\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n} \leqslant \alpha+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{x_r}{n}$$

因为 $0 \leqslant r \leqslant m-1$，在上式中令 $n\to\infty$，则有

$$\alpha-\varepsilon/2 \leqslant x_n/n \leqslant \alpha+\varepsilon/2$$

又因 ε 的任意性，则得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/n=\alpha$。

例 13 设 $\{x_n\}$ 是非负数列，满足 $x_{n+1} \leqslant x_n+1/n^2$，$n=1,2,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

分析 如果数列收敛，其极限是数列的确界，易知数列 $\{x_n\}$ 有界，其确界存在，可以证明数列的确界是数列的极限。

证明 因为 $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n+1/n^2 \leqslant x_1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}1/k^2$，$n=1,2,\cdots$，所以数列 $\{x_n\}$ 的下确界是存在的，令其下确界为 α，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，使得当 $n \geqslant N$ 时，有

$$\sum_{k=N}^{\infty}1/k^2<\varepsilon/2,\quad x_n-\alpha>-\varepsilon/2,\ \text{且}\ x_N-\alpha<\varepsilon/2$$

对于任意正整数 m，有

$$\begin{aligned}-\varepsilon/2<x_{N+m}-\alpha&=x_{N+m}-x_N+x_N-\alpha\\&=(x_{N+m}-x_{N+m-1})+\cdots+(x_{N+1}-x_N)+(x_N-\alpha)\\&<1/(N+m-1)^2+\cdots+1/N^2+\varepsilon/2<\varepsilon\end{aligned}$$

由于ε的任意性，令$m\to\infty$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

例 14 设数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})/n=0$。

分析 要证明该极限为零，可以考虑用已知条件估计相邻两项的差的大小，利用极限的定义进行证明。

证明 对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N>2$，当$n>N$时，

$$|x_n-x_{n-2}|<\varepsilon/2$$

对于充分大的正整数m，则有

$$\begin{aligned}|x_{N+m}-x_{N+(m-1)}| &\leqslant |x_{N+m}-x_{N+m-2}|+|x_{N+m-2}-x_{N+m-1}|\\ &\leqslant \varepsilon/2+|x_{N+m-1}-x_{N+m-3}|+|x_{N+m-3}-x_{N+m-2}|\\ &\leqslant \varepsilon+|x_{N+m-2}-x_{N+m-3}|\\ &\vdots\\ &\leqslant m\varepsilon/2+|x_N-x_{N-1}|\end{aligned}$$

选取m，使得$N+m>2|x_N-x_{N-1}|/\varepsilon$，于是就有

$$\begin{aligned}|x_{N+m}-x_{N+(m-1)}|/(N+m) &\leqslant m\varepsilon/2(N+m)+|x_N-x_{N-1}|/(N+m)\\ &\leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

从而原命题得证。

例 15 设实数序列$\{x_n\}$满足$(2-x_n)x_{n+1}=1$，$n=1,2,\cdots$，试证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

分析 由于已知条件只有一个，应充分利用这一系列等式的信息。如果序列有极限，易知该极限必为 1。所以只要证明该序列极限的存在性。

证明 由题设，显然$x_n\neq 0,2$，$n=2,3,\cdots$如果极限存在，记作a，在公式$(2-x_n)x_{n+1}=1$两边取极限，有$(2-a)a=1$，所以$a=1$。即若极限存在，则肯定等于 1。

令$y_n=1-x_n$，$n=1,2,\cdots$则有 $y_n\neq\pm1$，且若$\{y_n\}$的极限存在，则其极限必定为 0。

原题设关系式变为 $(1+y_n)(1-y_{n+1})=1$

所以 $y_{n+1}=y_n/(1+y_n)$

显然，若某个 $y_m=0$，则 $y_{m+1}=0$，依次类推，可证 $n\geqslant m$ 时 $y_n=0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，则证完。

现假设对一切 $n=1,2,\cdots$，$y_n\neq 0$，可以断言存在一个正整数 m，使得 $y_m>0$ 或 $y_m<-1$。事实上，若对一切正整数 n，有

$$-1<y_n<0$$

则由于 $y_{n+1}-y_n=-y_n^2/(1+y_n)<0$，即序列 $\{y_n\}$ 单调减少，且有下界 -1，所以极限 b 存在，而且有

$$b\leqslant\cdots<y_{n+1}<y_n<\cdots<y_1<0$$

但若 $\{y_n\}$ 极限存在，则必等于 0，即 $b=0$。这和上面关系式 $b<y_1<0$ 矛盾。所以存在一个正整数 m，使得 $y_m>0$ 或 $y_m<-1$。

设 $y_m<-1$，于是 $y_m+1<0$，$y_m<0$，因此 $y_{m+1}=y_m/(1+y_m)>0$。这就证明了序列 $\{y_n\}$ 中存在正整数 m，使得 $y_m>0$，由 $y_{m+1}=y_m/(1+y_m)>0$ 依次类推便证明了

$$y_n>0，\quad n=m,m+1,\cdots$$

而 $y_{n+1}-y_n=-y_n^2/(1+y_n)<0$，所以序列 $\{y_n\}$ 单调减少且有下界 0。这就证明了该序列极限存在，因此肯定为 0，证明了结论。

例 16 对 $x\in R$ 和正整数 n，定义 $x_1=\sin x$，$x_{n+1}=\sin x_n$，试讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性，当有极限时求出极限。

分析 由正弦函数的性质，对任意的 $x\in R$，$|\sin x|\leqslant 1<\pi/2$，而在 $[0,\pi/2]$ 中，$\sin x$ 满足不等式 $0\leqslant\sin x\leqslant x$，并且等式当且仅当 $x=0$ 时成立。可以考虑用单调有界必有极限证明结论。

解 正弦函数有如下性质

$x\in(0,\pi/2)$ 时，有 $0<\sin x<x$；$x\in(-\pi/2,0)$ 时，有 $0>\sin x>x$

（1）设 $x\in R$，使得 $x_1=\sin x=0$，显然此时 $x_n=0$，$n=1,2,\cdots$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

（2）设 $x\in R$，使得 $x_1=\sin x>0$，显然 $x_1\leqslant 1\leqslant\pi/2$，所以 $0<x_2=\sin x_1<x_1$，依次类推有 $0<\cdots<x_n<\cdots<x_2<x_1\leqslant 1$ 即 $\{x_n\}$ 是一个严格单调减少的有界数列，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在，且有 $a\in[0,1)$，在关系式 $x_{n+1}=\sin x_n$ 中令 $n\to\infty$，由正弦函数的连续性，

得$a=\sin a$。又$a\in[0,1)$，所以$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

（3）设$x\in R$，使得$x_1=\sin x<0$，与（2）类似可得$0>\cdots>x_n>\cdots>x_2>x_1\geqslant-1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$存在且$a=\sin a$，$a\in(-1,0]$。从而$a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

总之，对于任意的$x\in R$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

例 17 设$0<a\leqslant1$，$x_1=a/2$，…，$x_{n+1}=(a-x_n^2)/2$，…，试证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限值。

分析 数列$\{x_n\}$的有界性比较明显，但在本题中，$x_2-x_1=-x_1^2/2<0$，$x_3-x_2=(x_1^2-x_2^2)/2>0$，即$\{x_n\}$不是单调数列。进一步考察，可以看出$x_{n+1}-x_n$的符号交替出现，也即$\{x_{2k-1}\}$单调减少，$\{x_{2k}\}$单调增加。因此可以先考察它们的极限。

证明 首先讨论$\{x_n\}$的有界性。由题设，$0<x_1<a/2$，

$x_2=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{a^2}{2})=\dfrac{a}{2}(1-\dfrac{a}{4})$，故有$0<x_2<a/2$。假设$0<x_n<a/2$，结合条件$x_{n+1}=(a-x_n^2)/2$，由$x_n^2>0$得$x_{n+1}<a/2$；由$x_n<a/2$得$x_{n+1}>\dfrac{a}{2}-\dfrac{a^2}{8}>0$，因此对一切正整数$n$，有$0<x_n<a/2$，即$\{x_n\}$有界。

其次讨论$\{x_n\}$的单调性。由$\{x_n\}$的定义得，$x_1-x_2>0$，$x_2-x_3<0$，$x_3-x_4>0$，也即$x_1-x_3=x_2^2/2>0$，即$x_1>x_3$；$x_2-x_4=(x_3^2-x_1^2)/2<0$，即$x_2<x_4$。

假设$x_{2k-1}>x_{2k+1}$，则$x_{2k}-x_{2k+2}=(x_{2k+1}^2-x_{2k-1}^2)/2<0$，即得$\{x_{2k}\}$单调增加。

进一步，$x_{2k+1}-x_{2k+3}=(x_{2k+2}^2-x_{2k}^2)/2>0$，即得$\{x_{2k-1}\}$单调减少。根据单调有界必有极限，$\{x_{2k}\}$和$\{x_{2k-1}\}$的极限都存在。

设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=A$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=B$，由$0<x_n<a/2$知，$0\leqslant A\leqslant a/2$，$0\leqslant B\leqslant a/2$，再由题设有

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}(a - x_{2k-1}^2)/2$，即 $A=(a-B^2)/2$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}(a - x_{2k}^2)/2$，即 $B=(a-A^2)/2$

由上两式解得 $A=B$，故可设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，由 $A=(a-A^2)/2$ 得 $A=\sqrt{1+a}-1$。

例 18 给定两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，且 $a_1=1$，$b_1=-1$，$a_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$，$b_n=-a_{n-1}+4b_{n-1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)/2^{2n}$。

分析 先求出 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 各自的关系式，估计它们的差。

解 将关系式表示成矩阵的形式，有

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n-1}+2b_{n-1} \\ -a_{n-1}+4b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

令 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，$|\lambda E - A| = (\lambda-2)(\lambda-3)$

当 $\lambda=2$ 时，解 $(2E-A)x=0$ 得 $\xi_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda=3$ 时，解 $(3E-A)x=0$ 得 $\xi_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

设 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 = x_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

解得 $x_1=2$，$x_2=-3$

所以 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A^{n-1}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = A^{n-1}[2\xi_1 - 3\xi_2] = \begin{bmatrix} 2^{n+1}-3^n \\ 2^n-3^n \end{bmatrix}$

于是得到 $a_n = 2^{n+1}-3^n$，$b_n = 2^n - 3^n$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)/2^{2n}=0$

例 19 设序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足下面三个条件

（1）$y_{n+1} > y_n \quad n=1,2,\cdots$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1}) = a \qquad -\infty \leqslant a \leqslant +\infty$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n / y_n = a$。

分析 关键在于用已知条件估计两序列通项比值的大小，可以用极限定义进行证明。本题是著名的柯西–施笃兹（Cauchy-stolz）定理，用它的结论可以解决很多复杂的极限问题。

证明 先设a为实数，由（3）知对于任意的$\varepsilon > 0$，存在正整数N，当$n > N$时，$|(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1}) - a| < \varepsilon / 2$

于是对于$n > N$，

$(a - \varepsilon/2)(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (a + \varepsilon/2)(y_n - y_{n-1})$

因此 $(a - \varepsilon/2)(y_n - y_N) < x_n - x_N < (a + \varepsilon/2)(y_n - y_N)$

也即，当$n > N$时，

$$a - \varepsilon/2 < (x_n - x_N)/(y_n - y_N) < a + \varepsilon/2$$

我们注意到 $x_n / y_n - a$

$$= (x_N - ay_N)/y_n + (1 - y_N / y_n)[(x_n - x_N)/(y_n - y_N) - a]$$

所以，当$n > N$时，

$$|x_n / y_n - a| \leqslant |(x_N - ay_N)/y_n| + |(x_n - x_N)/(y_n - y_N) - a|$$

$$\leqslant |(x_N - ay_N)/y_n| + \varepsilon/2$$

取充分大的正整数N_1，使得当$n > N_1$时

$$|(x_N - ay_N)/y_n| < \varepsilon/2$$

令$N_2 = \max\{N, N_1\}$，当$n > N_2$时，就有

$$|x_n / y_n - a| \leqslant \varepsilon$$

至于$a = \pm\infty$情形，可以类似证明。

例 20 设$S_n = (\sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k)/n^2$，其中$C_n^k$为组合数，求$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$。

分析 本题可以利用施笃兹公式进行求解。

解 因为$n^2 \to \infty$，应用施笃兹公式有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k)/[(n+1)^2 - n^2]$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n} \ln(C_{n+1}^k / C_n^k) + \ln C_{n+1}^{n+1})/(2n+1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\sum_{k=0}^{n}\ln(n+1)/(n-k+1)]/(2n+1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(n+1)\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n+1}\ln k]/(2n+1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)]/[(2n+1)-(2n-1)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln[(n+1)/n]^{n}/2$$

$$=1/2$$

例 21 设 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)/n$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)/n$。

分析 本题不能直接利用施笃兹公式，可以先进行变形处理后再用。

证明 因为 $a_n=[a_n-(a_1+\cdots+a_n)/n]+(a_1+\cdots+a_n)/n$，故只须证明第一项极限为零。为利用上 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，我们令 $b_1=a_1$，$b_2=a_2-a_1$，…，$b_n=a_n-a_{n-1}$，…，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=0$，且有

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=b_n+\cdots+b_1$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n-(a_1+\cdots+a_n)/n]$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(b_1+\cdots+b_n)-[b_1+(b_1+b_2)+\cdots+(b_1+\cdots+b_n)]/n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}[b_2+2b_3+\cdots+(n-1)b_n]/n$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n-1)b_n/[n-(n-1)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(n-1)/n]nb_n=0$$

例 22 设 $x_0=m$，$x_1=m+\varepsilon\sin x_0$，$\cdots,x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\cdots$ 证明序列 $\{x_n\}$ 有极限 a，且 a 是满足方程 $x=m+\varepsilon\sin x$，$0<\varepsilon<1$ 的惟一解。

分析 证明极限存在可以利用序列 $\{x_n\}$ 是柯西(Cauchy)列，惟一性可以利用反证法。

证明 对于任意的正整数 p，我们有

$$x_{n+p}-x_n=\varepsilon(\sin x_{n+p-1}-\sin x_{n-1})$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{x_{n+p-1}+x_{n-1}}{2}\sin\frac{x_{n+p-1}-x_{n-1}}{2}$$

于是 $\left|x_{n+p}-x_n\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\left|\sin\frac{x_{n+p-1}-x_{n-1}}{2}\right|\leqslant\cdots$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}\left|x_{p+1}-x_1\right|$$

又由于 $\left|x_{p+1}-x_1\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\left|\cos\frac{x_p+x_0}{2}\sin\frac{x_p-x_0}{2}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$

所以 $\left|x_{n+p}-x_n\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

因此序列$\{x_n\}$是 Cauchy 列，有极限a，在关系式$x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}$中令$n\to\infty$，得 $a=m+\varepsilon\sin a$。

若另有一解b，使得 $b=m+\varepsilon\sin b$，则

$a-b=\varepsilon(\sin a-\sin b)$

因此 $0\leqslant|a-b|=|\varepsilon(\sin a-\sin b)|\leqslant\varepsilon|a-b|<|a-b|$，矛盾。

故惟一性也得证。

例 23 设$a_0=0$，定义$a_{n+1}=1+\sin(a_n-1)$，$n=0,1,2,\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$的值。

分析 只要求出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$的值即可。考虑到$\{a_n\}$为非负数列，运用 Cauchy 定理：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$即可获证。

解 原条件化为$1-a_{n+1}=\sin(1-a_n)$，令$x_n=1-a_n$，则

$x_{n+1}=\sin x_n$，$x_0=1$

由数学归纳法得$\{x_n\}$单调下降，且$x_n\geqslant0$，$x_n\in[0,1]$ 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$

在$x_{n+1}=\sin x_n$两边取极限得$x^*=\sin x^*$，$x^*\in[0,1]$满足上式的根只有$x^*=0$。所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1$。

例 24 设 $-1<x_0<1$，$x_n=\sqrt{(1+x_{n-1})/2}$，$n=1,2,\cdots$ 试求极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-x_n)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_1\cdots x_n)$

分析 利用适当的变换，求出序列的通项，进行化简，求出极限。

解 由 $-1<x_0<1$，令 $x_0=\cos\theta$，$0<\theta<\pi$，则

$$x_1=\sqrt{(1+x_0)/2}=\sqrt{(1+\cos\theta)/2}=\cos(\theta/2),$$

一般地，$n=1,2,\cdots$

$$x_n=\sqrt{(1+x_{n-1})/2}=\sqrt{[1+\cos(\theta/2^{n-1})]/2}=\cos(\theta/2^n),$$

因此
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}4^n(1-x_n)&=\lim_{n\to\infty}4^n[1-\cos(\theta/2^n)]\\&=\lim_{n\to\infty}2\times4^n\sin^2(\theta/2^{n+1})\\&=\theta^2/2=(\arccos x_0)^2/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(x_1\cdots x_n)&=\lim_{n\to\infty}[\cos(\theta/2)\cdots\cos(\theta/2^n)]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(1/2^n)\sin\theta}{\sin(\theta/2^n)}\\&=\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{(\arccos x_0)^2}\end{aligned}$$

1.3 自测题及提示

1.3.1 自测题

1．设 $x\to0$ 时，$f(x)\sim x$，$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{2i-1}{n^2}a)$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$（$a>0$）。

2．求 $\lim\limits_{x\to0}[(a_1^x+\cdots+a_n^x)/n]^{1/x}$，其中 $a_i>0$，$i=1,\cdots,n$。

3．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$。

4．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{e^{1-1/i}}{(1+1/i)^i}$。

5．对于数列 $\{x_n\}$，$x_0=a$，$0<a<\pi/2$，$x_n=\sin x_{n-1}$（$n=1,2,\cdots$），证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\sqrt{n/3}=1$。

6．若 $0<\lambda<1$，$a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\cdots+\lambda^n a_0)=a/(1-\lambda)$。

7．设 $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 当 $n\to+\infty$ 时有极限，$\{p_n\}$ 为单调增加的正数数列，且 $n\to+\infty$ 时，$p_n\to+\infty$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1a_1+\cdots+p_na_n}{p_n}=0$。

8．设 $x_1=1$，$x_2=1/2$，$x_{n+1}=1/(1+x_n)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

9．设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n+2y_n$，$y_{n+1}=x_n+y_n$，$x_1=y_1=1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)$。

10．设 $f(x)$ 映 $[a,b]$ 到 $[a,b]$，且 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$。任取 $x_1\in[a,b]$，令 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$，求证数列 $\{x_n\}$ 有极限 x^*，且 $f(x^*)=x^*$。

11．设数列 $\{x_n\}$ 由下式给出，$x_1=2$，$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，求 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限。

1.3.2 自测题提示

1．注意到 $a=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2i-1}{n^2}a$，利用极限的定义可以证明。

2．属于 1^∞ 型未定式的极限问题，可取自然对数，然后用洛必达法则直接计算，或利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$ 来计算。

3．本题可以用定积分的定义式来求解，是函数 $f(x)=1/(1+x^2)$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分。

4．本题可利用 Stirling 公式代换进行求解。$n!=\sqrt{2n\pi}\,n^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$，其中 $0\leqslant\theta_n\leqslant1$。

5．先由单调有界法则可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，利用施笃兹定理（$\infty/\infty$）可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^{\ 2}=3$。

6．令 $a_i=a+b_i$，$i=0,1,\cdots$，再用施笃兹定理（∞/∞）。

7．先用 A_k 替换 a_k，$a_k=A_k-A_{k-1}$，再利用施笃兹公式即可。

8．可利用单调有界分别证明奇数序列和偶数序列收敛，再证明两序列收敛于同一个值。

9．记 $a_n=x_n/y_n$，则 $|a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{4}|a_n-a_{n-1}|$。

10．数列 $\{x_n\}$ 有界，证明单调性即可。

11．此数列不是单调数列，但其奇子列和偶子列都是单调有界数列。先证明它们的极限存在且相等。

第 2 章　微积分中值定理

2.1　内容提要

中值定理包含微分中值定理和积分中值定理，本章将这两部分放在一起进行讲解。重点讨论中值定理的应用。解题的主要方法是辅助函数法，它是解决中值定理的基本方法，是转化问题的一种重要手段，在高等数学中经常遇到。

费马定理　若函数 $f(x)$ 满足条件（1）函数在 x_0 的某邻域内有定义，且在此邻域内恒有 $f(x) \leqslant f(x_0)$ 或 $f(x) \geqslant f(x_0)$；（2）$f(x)$ 在 x_0 处可导，则有 $f'(x_0)=0$。

洛尔定理　设函数 $f(x)$ 满足条件（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续。（2）在开区间 (a,b) 上可导。（3）$f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一个 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

拉格朗日中值定理　设函数 $f(x)$ 满足条件（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续。（2）在开区间 (a,b) 上可导，则在 (a,b) 内至少存在一个 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

柯西中值定理　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续。（2）在开区间 (a,b) 上可导，且 $g'(x)\neq 0$，则在 (a,b) 内至少存在一个 ξ，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

泰勒公式　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x，在 x_0 与 x 之间至少存在一个 ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，当 $x_0=0$ 时也称为麦克劳林公式。

第一积分中值定理 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

其中 $m\leqslant\mu\leqslant M$，$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$，$m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$。特别地，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有 $\xi\in[a,b]$，使得

$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

第二积分中值定理 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则有 $\xi\in[a,b]$，使得

$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$

若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$f(x)$ 单调递减且非负，则有 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x$。

若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$f(x)$ 单调递增且非负，则有 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$。

2.2 例题解析

例 1 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 $f''(x)$ 存在，又连结 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$ 两点的直线交曲线 $y=f(x)$ 于点 $C(c,f(c))$，且 $a<c<b$，试证在 (a,b) 内至少存在一个 ξ，使得 $f''(\xi)=0$。

分析 此种类型题的结论是，存在 ξ，使得 $f^{(n)}(\xi)=0$。证法主要有，（1）验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足洛尔定理的条件，由洛尔定理即得。（2）验证 ξ 为 $f^{(n)}(x)$ 的最值或极值点，用费马定理即得。（3）也可以应用泰勒公式证明。

证明 依题设，函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上分别满足拉格朗日中值定理，于是得到

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\qquad \xi_1\in(a,c)$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c} \qquad \xi_2\in(c,b)$$

因为 A、B、C 三点在同一直线上，所以我们有

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

故 $$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$$

因而 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足洛尔定理。

于是，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$。

例 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，试证，对于任意的实数 α，都存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$。

分析 要证 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$，即要 $f'(\xi)-\alpha f(\xi)=0$，亦即要使 ξ 为函数 $f'(x)-\alpha f(x)$ 的零点。

证明 构造辅助函数 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$，由题设有 $F(a)=F(b)=0$，函数 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 在 $[a,b]$ 上满足洛尔定理的条件，又 $F'(x)=[f'(x)-\alpha f(x)]\mathrm{e}^{-\alpha x}$，故存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$。

例 3 若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$，则存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

分析 要证原结论，只须证

$$[f(a)-f(\xi)]g'(\xi)=f'(\xi)[g(\xi)-g(b)]$$

也即要证 $$f(a)g'(\xi)+f'(\xi)g(b)=f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)$$

亦即要证 $$f(a)g'(\xi)+f'(\xi)g(b)-[f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]=0$$

可以构造辅助函数用洛尔定理进行证明。

证明 令 $F(x)=f(a)g(x)+g(b)f(x)-f(x)g(x)$，由题设条件可知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

又 $$F(a)=f(a)g(a)+g(b)f(a)-f(a)g(a)=g(b)f(a)$$

$$F(b)=f(a)g(b)+g(b)f(b)-f(b)g(b)=f(a)g(b)$$

故满足洛尔定理的条件，于是存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $f(a)g'(\xi)+g(b)f'(\xi)-f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$

亦即 $[f(a)-f(\xi)]g'(\xi)=f'(\xi)[g(\xi)-g(b)]$

再由题设$g'(x)\neq 0$，即得 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

例 4 设函数$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证（1）在开区间(a,b)内$g(x)\neq 0$。（2）在开区间(a,b)内存在一个ξ，使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。

分析 命题（1）的证明用反证法比较恰当，可以增加题设条件，（2）中由于是同一个ξ，不能将$f(x)$，$g(x)$分别按泰勒公式展开，因为两公式中的ξ可能不一样。可以构造函数，用洛尔定理证明。

证明 （1）假设存在$c\in(a,b)$，使得$g(c)=0$，将函数$g(x)$分别在$[a,c]$和$[c,b]$上应用洛尔定理，于是得到，存在$\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$

再对函数$g'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上使用洛尔定理。存在$\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $g''(\xi_3)=0$，这与题设$g''(x)\neq 0$矛盾，故结论成立。

（2）欲证结论，只须证明$f(\xi)g''(\xi)=g(\xi)f''(\xi)$

只须证$f(\xi)g''(\xi)+f'(\xi)g'(\xi)=g(\xi)f''(\xi)+f'(\xi)g'(\xi)$

只须证$[f(\xi)g''(\xi)+f'(\xi)g'(\xi)]-[g(\xi)f''(\xi)+f'(\xi)g'(\xi)]=0$

构造辅助函数 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$

由题设条件知道，函数$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$F(a)=F(b)=0$，由洛尔定理有，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

由于$g(\xi)\neq 0$，$g''(\xi)\neq 0$，故原结论成立。

例 5 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$(0<a<b)$，试证，存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln(b/a)$

分析 要证原结论，只须证$[f(b)-f(a)]/\ln(b/a)=\xi f'(\xi)$，

令$[f(b)-f(a)]/\ln(b/a)=k$，得到$f(b)-k\ln b=f(a)-k\ln a$

上式是一个对称式，可以想到构造辅助函数利用洛尔定理来证明。

证明 令$F(x)=f(x)-k\ln x$，其中k为分析中给出的常数。显然，$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，又$F(a)=F(b)$，洛尔

定理的条件满足，于是，存在$\xi \in (a,b)$，使得$F'(\xi)=0$。

即　$f'(\xi)-k/\xi=0$，也即$k=\xi f'(\xi)$，原结论得证。

评注　本题方法适合常数可分离出的命题。做法是令常数为k，恒等变形，使区间端点分开到等式两边，分析变形后的等式是否为对称式或者轮换对称式，将端点值换成变量即可得到辅助函数。

例 6　设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，（$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \pi/2$），试证：至少存在两点$\xi,\eta \in (a,b)$，使得

$$f'(\eta)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi)\frac{\sin\eta}{\cos\xi}$$

分析　这类问题一般需要应用两次中值定理，再进行某种运算。本题可以考虑分别对函数$\sin x$、$\cos x$在区间$[a,b]$上使用柯西中值定理，然后从两式中进行运算。

证明　设$g_1(x)=\sin x$，由柯西中值定理有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}，\quad a<\xi<b$$

又设$g_2(x)=\cos x$，由柯西中值定理得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\cos b-\cos a}=\frac{f'(\eta)}{-\sin\eta}，\quad a<\eta<b$$

比较上面两等式得到

$$\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}(\sin b-\sin a)=-\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}(\cos b-\cos a)$$

即　$$\frac{\sin\eta}{\cos\xi}f'(\xi)=-\frac{\cos b-\cos a}{\sin b-\sin a}f'(\eta)$$

亦即$f'(\eta)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi)\sin\eta/\cos\xi$

例 7　设$f(x)$在$[0,1]$上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$k_1,\cdots,k_n$为n个正数，证明在区间$[0,1]$内存在一组互不相等的数$x_1,\cdots,x_n$，使得$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{k_i}{f'(x_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$。

分析　记$m=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$，用它间除等式两端，得$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{f'(x_i)}=1$，其中

$\lambda_i = k_i / m$，$0 < \lambda_i < 1$，$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$。问题的关键是要找到$n$个不同的数$x_1, \cdots, x_n$使得相应的导数$f'(x_i)$满足上面等式。根据拉格朗日定理，即要找$n$个不同的弦，使它们的斜率满足$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\tan \alpha_i} = 1$。如果把$\lambda_i$看成弦在$y$轴上的投影，则$\lambda_i / \tan \alpha_i$就是该弦在$x$轴上的投影。问题化为找$n$个不同的弦，使它们在$y$轴上的投影为$\lambda_1$，…，$\lambda_n$，在$x$轴上的投影和为1。由于$f(0)=0$，$f(1)=1$，我们在$y$轴上，对区间进行分割$0 = A_0 < A_1 < \cdots < A_n = 1$（见图 2-1），使得$A_{i-1}A_i = \lambda_i$，$i = 1, \cdots, n$。先过$A_1$作水平直线和曲线交点$B_1$，$OB_1$为第一个所需要的弦。同理，过$A_2$，$A_3$，$\cdots A_n$作水平线，和曲线得交点$B_2$，$B_3$，$\cdots B_n$。弦$OB_1$，$B_1B_2$，$\cdots B_{n-1}B_n$即为所找。它们在$y$轴上的投影为$\lambda_1$，…，$\lambda_n$，在$x$轴上的投影和为1。

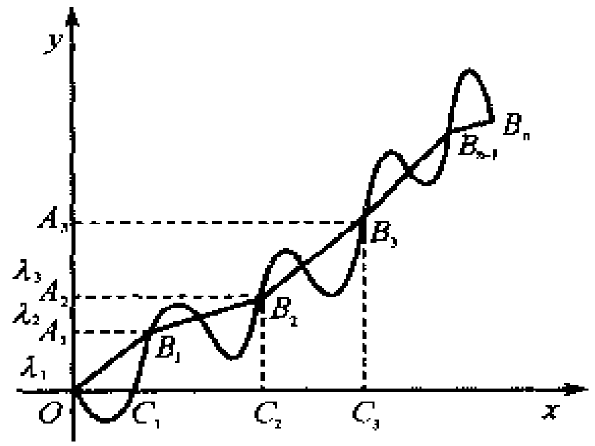


图 2-1

证明　记$m = \sum_{i=1}^{n} k_i$，$\lambda_i = k_i / m$，$i = 1, \ldots, n$，则有$0 < \lambda_i < 1$，$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$。因$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(x)$在$[0,1]$上连续，由连续函数的介值性，存在点$c_1 \in (0,1)$，使得$f(c_1) = \lambda_1$。又由$\lambda_1 < \lambda_1 + \lambda_2 < 1$，存在点$c_2 \in (c_1, 1)$，使得$f(c_2) = \lambda_1 + \lambda_2$。依次下去。我们找到一列点

$$0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = 1\text{，使得}$$

$$f(c_i) = \lambda_1 + \cdots \lambda_k\text{，}\quad i = 1, \ldots, n$$

应用拉格朗日中值定理，存在$x_i \in (c_{i-1}, c_i)$，$c_0 = 0$，使得

$$f'(x_i) = \frac{f(c_i) - f(c_{i-1})}{c_i - c_{i-1}} = \frac{\lambda_i}{c_i - c_{i-1}}$$

即　$c_i - c_{i-1} = \lambda_1 / f'(x_i)$，$i = 1, \ldots, n$

从而　$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) = c_n - c_0 = 1$

将 $\lambda_i = k_i / m$ 代入上式，得到 $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n}k_i$ 。

例 8 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可微，$f(0)=0$，并设有实数 $M>0$，使得 $|f'(x)| \leqslant M|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，试证明在 $[0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$。

分析 拉格朗日中值定理揭示了导函数和原函数之间的关系，可以考虑应用该定理将题设条件化为原函数和自身的关系式。

证法 1 因 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可微，$f(0)=0$，由拉格朗日中值定理有 $|f(x)| = |f(0)+f'(\xi_1)(x-0)| = |f'(\xi_1)x| \leqslant M|f(\xi_1)|x$

当限制 $x\in(0,1/2M]$ 时，则有

$$|f(x)| \leqslant |f(\xi_1)|/2 ，\ 0<\xi_1<x$$

多次运用此式得到

$$|f(x)| \leqslant |f(\xi_1)|/2 \leqslant |f(\xi_1)|/4 \leqslant \cdots \leqslant |f(\xi_1)|/2^n$$

其中 $\quad 0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots\xi_1<x\leqslant 1/2M$

由 $f(x)$ 的连续性，存在 $A>0$，当 $x\in[0,1/2M]$，有 $|f(x)|\leqslant A$。故 $|f(x)|\leqslant A/2^n$，$n=1,2,\cdots$

令 $n\to+\infty$，得到 $f(x)\equiv 0$，$x\in[0,1/2M]$。用数学归纳法，可以证明在一切 $[\frac{i-1}{2M},\frac{i}{2M}]$ $(i=1,2,\cdots)$ 上恒有 $f(x)\equiv 0$。所以在区间 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$。

证法 2 因 $|f(x)|$ 在 $[0,1/2M]$ 上连续，由连续函数的性质知，存在 $x_1\in[0,1/2M]$ 使得 $f(x_1)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1/2M}|f(x)|=A$

于是 $\quad A=|f(x_1)|=|f(0)+f'(\xi_1)(x_1-0)|=|f'(\xi)x_1|$

$$\leqslant M|f(\xi)|x_1 \leqslant |f(\xi)|/2 \leqslant A/2$$

所以 $A=0$，即在 $[0,1/2M]$ 上，$f(x)\equiv 0$。以下应用数学归纳法，同证法一。

证法 3 如果 $f(x)$ 不恒等于 0，则存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0)>0$。记 $x_1=\inf\{x\,|\,(x,x_0)\text{ 上 } f(x)>0\}$，由连续函数的局部保号性，只能是 $f(x_1)=0$，(x_1,x_0) 内 $f(x)>0$。

令 $g(x)=\ln f(x)$， $x\in(x_1,x_0)$，则

$$|g'(x)|=|f'(x)|/|f(x)|\leqslant M$$

故 $g(x)$ 在有限区间 (x_1,x_0) 上有界。但是

$\lim\limits_{x\to x_1+0}f(x)=f(x_1)=0$， $\lim\limits_{x\to x_1+0}g(x)=-\infty$，矛盾，原结论成立。

例 9 设 $f(x)$ 二次可微，$f(0)=f(1)=0$， $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$，试证 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant -16$。

分析 本题是导函数的估计问题，一般可以利用泰勒公式在合适点处展开来解决。

证明 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，有最大值和最小值，又因最大值为 2，端点处函数值为 0，故最大值在 $(0,1)$ 内部取得。即存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $\quad f(x_0)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$

于是 $f(x_0)$ 为极大值，由费马定理有 $\quad f'(x_0)=0$

在 $x=x_0$ 处按照泰勒公式展开，存在 ξ， $\eta\in(0,1)$ 使得

$$0=f(0)=f(x_0)+f''(\xi)(0-x_0)^2/2=2+f''(\xi)x_0^{\ 2}/2$$

$$0=f(1)=f(x_0)+f''(\eta)(1-x_0)^2/2=2+f''(\eta)(1-x_0)^2/2$$

因此 $\quad \min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant\min\{f''(\xi),f''(\eta)\}=\min\{-\dfrac{4}{x_0^2},-\dfrac{4}{(1-x_0)^2}\}$

当 $x_0\in(0,1/2]$ 时， $\min\{-\dfrac{4}{x_0^2},-\dfrac{4}{(1-x_0)^2}\}=-\dfrac{4}{x_0^2}\leqslant -16$

当 $x_0\in[1/2,1)$ 时， $\min\{-\dfrac{4}{x_0^2},-\dfrac{4}{(1-x_0)^2}\}=-\dfrac{4}{(1-x_0)^2}\leqslant -16$

所以 $\quad \min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant -16$

例 10 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数， $f'(a)=f'(b)=0$，试证，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$。

证法 1 应用泰勒公式，将 $f[(a+b)/2]$ 分别在点 a， b 点展开，注意到 $f'(a)=f'(b)=0$，存在 ζ,η， $a<\zeta<(a+b)/2<\eta<b$，使得

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{1}{2}f''(\zeta)(\frac{b-a}{2})^2$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{1}{2}f''(\eta)(\frac{b-a}{2})^2$$

上面两式相减得，$f(b)-f(a)+[f''(\eta)-f''(\zeta)](b-a)^2/8=0$

故 $\dfrac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\leqslant \dfrac{1}{2}(|f''(\zeta)+f''(\eta)|)\leqslant |f''(\xi)|$

其中当$|f''(\zeta)|\geqslant|f''(\eta)|$时，$\xi=\zeta$；当$|f''(\zeta)|\leqslant|f''(\eta)|$时，$\xi=\eta$。

证法 2 若$f(a)=f(b)$，结论显然成立。不妨设$f(a)<f(b)$，$f(a)>f(b)$时类似可证。记$c=(a+b)/2$

如果$f(c)\geqslant[f(a)+f(b)]/2$，$|f(b)-f(a)|=f(b)-f(a)$ $\leqslant 2[f(c)-f(a)]$

将$f[(a+b)/2]$在点a展开，存在ζ，$a<\zeta<(a+b)/2$，使得

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{1}{2}f''(\zeta)(\frac{b-a}{2})^2$$

所以$|f''(\zeta)|=2[f(c)-f(a)](\dfrac{2}{b-a})^2\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

如果$f(c)\leqslant[f(a)+f(b)]/2$，类似可证。

例 11 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶导数连续，$f(0)=f(1)=0$，并且当$x\in(0,1)$时，$|f''(x)|\leqslant A$，求证$|f'(x)|\leqslant A/2$。

分析 对于函数具有二阶或二阶以上可导，且最高阶导数的大小或者上下界已知的命题可以考虑用泰勒公式。方法是写出比最高阶低一阶的函数泰勒展开式，适当选取等式两端的变量，根据已知条件对展开式进行放缩。

证明 因为$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数，$f(x)$可以展开为一阶泰勒公式。

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，其中$\xi$在$x$，$x_0$之间。

令$x=0$，存在ξ_1，$0<\xi_1<x_0\leqslant 1$

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x_0)^2$$

令$x=1$，存在ξ_2，$0<\xi_2<x_0\leqslant 1$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$$

将上面两式相减得到

$$f'(x_0)=f(1)-f(0)+\frac{1}{2}[f''(\xi_1)x_0^2-f''(\xi_2)(1-x_0)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)x_0^2-f''(\xi_2)(1-x_0)^2]$$

又 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\leqslant A$，所以

$$|f'(x_0)|\leqslant\frac{A}{2}[x_0^2+(1-x_0)^2]=\frac{A}{2}(2x_0^2-2x_0+1)$$

当 $0\leqslant x_0\leqslant 1$ 时，$2x_0^2-2x_0+1\leqslant 1$

故 $|f'(x_0)|\leqslant\dfrac{A}{2}$，由于 x_0 的任意性，知原结论成立。

例 12 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二次可微，且 $M_k=\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty$，$(k=0,1,2)$，$f^{(0)}(x)$ 表示 $f(x)$，证明不等式 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$。

证明 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi)h^2$，$\xi$ 在 x 与 $x+h$ 之间，$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\eta)h^2$，$\eta$ 在 $x-h$ 与 x 之间。

上面二式相减得，

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+h^2[f''(\xi)-f''(\eta)]/2$$

即 $2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)-h^2[f''(\xi)-f''(\eta)]/2$

所以 $2|f'(x)|h\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|+h^2[|f''(\xi)|+|f''(\eta)|]/2$

$$\leqslant 2M_0+h^2M_2$$

即对于任意的 h，有 $|f'(x)|\leqslant M_0/h+hM_2/2$

而 $\dfrac{M_0}{h}\cdot\dfrac{hM_2}{2}=\dfrac{1}{2}M_0M_2$ 为常数，上式右端作为 h 的函数，当 $M_0/h=hM_2/2$ 时取最小，此时 $h=\sqrt{2M_0/M_2}$，代入得

$|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$ 所以 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$。

例 13 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有二阶导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$|f''(x)|\leqslant|f(x)|+|f'(x)|$，试证，存在 $\delta>0$，使得 $(-\delta,\delta)$ 内 $f(x)\equiv 0$。

分析 本题出现二阶导数和一阶导数之间的不等式，可以考虑利用泰勒公式将 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 进行展开。

证明 利用泰勒公式我们有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(\xi)x^2/2=f''(\xi)x^2/2$$

$$f'(x)=f'(0)+f''(\eta)x=f''(\eta)x$$

从而 $|f(x)|+|f'(x)|=\left|f''(\xi)x^2/2\right|+|f''(\eta)x|$

为证明 $f(x)$ 在 x 的某邻域内恒为零，我们将 x 限制在 $[-1/4,1/4]$ 内，显然 $|f(x)|+|f'(x)|$ 在 $[-1/4,1/4]$ 上连续，存在 $x_0\in[-1/4,1/4]$，使得

$$|f(x_0)|+|f'(x_0)|=\max_{-1/4\leqslant x\leqslant 1/4}\{|f(x)|+|f'(x)|\}\equiv M$$

$$\begin{aligned}M&=|f(x_0)|+|f'(x_0)|=\left|f''(\xi_0)x_0^2/2\right|+|f''(\eta_0)x_0|\\&\leqslant(|f''(\xi_0)|+|f''(\eta_0)|)/4\\&\leqslant(|f'(\xi_0)|+|f(\xi_0)|+|f'(\eta_0)|+|f(\eta_0)|)/4\\&\leqslant 2M/4=M/2\end{aligned}$$

亦即 $0\leqslant M\leqslant M/2$，所以 $M=0$，在 $[-1/4,1/4]$ 上 $f(x)\equiv 0$。

例 14 设 $f(x)$ 于 $[0,1]$ 上可微，$f(rx)=f'(x)$，$x\in(0,1)$，其中 $0<r\leqslant 1$ 是常数，又设 $f(0)=0$，证明 $f(x)\equiv 0$。

分析 易知函数无穷次可微，可利用泰勒展开式进行估计。

证明 $f'(x)=f(rx)$，$f''(x)=f'(rx)r=rf(r^2x)$

$f'''(x)=r^3f'(r^2x)=r^3f(r^3x)$，…，$f^{(n)}(x)=r^{Q(n)}f(r^nx)$，…

其中 $Q(n)$ 是与 n 有关的整数。由题设易知，

$$f^{(n)}(0)=0\ (n=0,1,2\cdots),\quad \left|f^{(n)}(x)\right|<M,\quad x\in[0,1]$$

将函数 $f(x)$ 展开得到，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

其中 $0<\theta<1$，从而得到

$$\left|f(x)\right| \leqslant \frac{M}{n!} \to 0 \quad (n \to +\infty), \quad x \in [0,1]$$

因此 $f(x) \equiv 0$。

例 15 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内无穷次可微函数，并且满足（1）$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M$，$M>0$ 是常数 $(n=0,1,2,\cdots)$。（2）$f(1/n)=0$，$(n=0,1,2,\cdots)$，证明 $f(x)\equiv 0$。

分析 可以考虑用函数的泰勒展开式对函数进行估计。

证明 可以先证明对于任意的非负整数 k，存在单调递减收敛于零的数列 $\{x_n^k\}$，$x_n^k > x_{n+1}^k$，使得 $f^{(k)}(x_n^k)=0\ (n=1,2,\cdots)$。

由已知条件（2）知，当 $k=0$ 时，结论成立。假设 $k=m$ 时成立，亦即存在单调递减数列 $\{x_n^m\}$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n^m \to 0$，而且使得 $f^{(m)}(x_n^m)=0\ (n=1,2,\cdots)$，依据洛尔定理，存在 $x_n^{m+1} \in (x_{n+1}^m, x_n^m)$，使得 $f^{(m+1)}(x_n^{m+1})=0\ (n=1,2,\cdots)$，由夹逼法则知，当 $n\to\infty$ 时，$x_n^{m+1}\to 0$，故 $k=m+1$ 时结论成立。由数学归纳法知要证结论正确。

由 $f^{(k)}(x)$ 的连续性可知，$f^{(k)}(0)=0\ (k=0,1,2,\cdots)$，从函数的泰勒展开式得到

$$f(x)=f(0)+f'(0)x/1!+\cdots+f^{(n-1)}(0)x^{n-1}/(n-1)!+f^{(n)}(\theta x)x^n/n!$$
$$=f^{(n)}(\theta x)x^n/n!$$

由已知条件（1）得到

$$\left|f(x)\right| \leqslant M\left|x\right|^n/n! \qquad (n=1,2,\cdots)$$

令 $n\to\infty$，则得到 $f(x)\equiv 0$。

例 16 证明等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0\ (p>0)$

分析 可以用积分中值定理进行估计再求极限。

证明 1 由于 $f(x)=\sin x/x$ 在 $[n,n+p]$ 上连续，函数 $g(x)=1$ 在 $[n,n+p]$ 上可积且不变号，故由积分第一中值定理，存在 $\xi_n\in[n,n+p]$，使得 $\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\int_n^{n+p}\mathrm{d}x=p\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{\xi_n\to\infty}p\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}=0$

证明 2 由于 $g(x)=\sin x$ 在 $[n,n+p]$ 上可积， $f(x)=1/x$ 在 $[n,n+p]$ 上单调递减且非负，所以，由积分第二中值定理知，存在 $\xi_n\in[n,n+p]$，使得

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_n^{\xi_n}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{n}(\cos n-\cos\xi_n)$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\cos n-\cos\xi_n)=0$

例 17 设 $f(x)\in[a,b]$，且单调增加。求证：
$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 。

证明 1 用积分第一中值定理。

$$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x+f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x$$

$$(a\leqslant\xi_1\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\xi_2\leqslant b)$$

$$=-f(\xi_1)\frac{(b-a)^2}{2}+f(\xi_2)\frac{(b-a)^2}{2}$$

$$=\frac{(b-a)}{2}[f(\xi_2)-f(\xi_1)]\geqslant0$$（因为 $f(x)$ 单调增加）。

注意 积分第一中值定理的要求被积函数中至少有一个因子在积分区间上是不变号的，本题的证明中虽然被积函数的两个因子都不是不变号的，但是因子 $[x-(a+b)/2]$ 只有一个变号点，可以通过分段使得在每一区间中是不变号的，以便应用积分第一中值定理。

证明 2 用积分第二中值定理。因为 $f(x)$ 单调增加，所以 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(a)\int_a^{\xi}(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x+f(b)\int_{\xi}^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x$$

$$=f(a)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x+(f(b)-f(a))\int_{\xi}^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x$$

$$=(f(b)-f(a))\{\frac{b^2-\xi^2}{2}-\frac{a+b}{2}(b-\xi)\}$$

$$=(f(b)-f(a))\frac{b-\xi}{2}(\xi-a)\geqslant 0。$$

例 18 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f(\frac{1}{2})$，$2\int_{1/2}^1 f(x)dx=f(2)$。证明：存在一个 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$

分析 在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时，可以考虑先用积分中值定理对该积分式处理一下。

证明 $f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=2\times(1-1/2)f(\eta)=f(\eta)$，$1/2\leqslant\eta\leqslant 1$。于是 $f'(x)$ 在 $[\eta,2]$ 上满足洛尔定理，即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$，使 $f'(\xi_1)=0$。

又 $f(x)$ 在 $[0,1/2]$ 上满足洛尔定理，于是存在一个 $\xi_2\in(0,1/2)$，使 $f'(\xi_2)=0$。由此可知 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$。

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上使用洛尔定理，于是存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$。

例 19 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是非负、单调递减的连续函数，且 $0<a<b<1$，证明：$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

证明 由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(\xi_1)\geqslant af(a)，\quad \xi_1\in[0,a]，$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant (b-a)f(a)，\quad \xi_2\in[a,b]。$$

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

故 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

例 20 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证明 令 $F(x)=f(x)+f'(x)$，则 $\mathrm{e}^x F(x)=[\mathrm{e}^x f(x)]'$

对于任给 $\varepsilon>0$，因 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$，故存在 $x_0>0$，当 $x\geqslant x_0$ 时，$|F(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$。

由于 $\int_{x_0}^x \mathrm{e}^t F(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x [\mathrm{e}^t f(t)]'\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x f(x)-\mathrm{e}^{x_0} f(x_0)$

从而 $f(x)=\dfrac{\int_{x_0}^x \mathrm{e}^t F(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{x_0} f(x_0)}{\mathrm{e}^x}$

$$=\frac{F(\xi)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x_0})}{\mathrm{e}^x}+\frac{\mathrm{e}^{x_0} f(x_0)}{\mathrm{e}^x} \qquad x_0\leqslant\xi\leqslant x$$

对固定的 x_0，因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x_0} f(x_0)}{\mathrm{e}^x}=0$，故存在 $X>x_0$，

当 $x>X$ 时，$\left|\mathrm{e}^{x_0} f(x_0)/\mathrm{e}^x\right|<\varepsilon/2$

因此当 $x>X$ 时，$|f(x)|\leqslant\left|\dfrac{F(\xi)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x_0})}{\mathrm{e}^x}\right|+\left|\dfrac{\mathrm{e}^{x_0} f(x_0)}{\mathrm{e}^x}\right|$

$$\leqslant|F(\xi)|+\left|\frac{\mathrm{e}^{x_0} f(x_0)}{\mathrm{e}^x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由极限的定义，得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

例 21 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且对任何闭区间 $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，皆成立 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M|\beta-\alpha|^{1+\delta}$，其中，$M,\delta$ 为正的常数。证明 $f(x)\equiv 0$ （$a\leqslant x\leqslant b$）。

证明 任取$\alpha \in (a,b)$，令$\varepsilon_k = \dfrac{b-a}{k+1}(k=1,2,\cdots)$
则$\alpha+\varepsilon_k<b$，且$\varepsilon_k \to 0\ (k \to +\infty)$。据题设

$$\left|\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon_k} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\varepsilon_k^{1+\delta}，(k=1,2,\cdots)。$$

另一方面，据积分第一中值定理

$$\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon_k} f(x)\mathrm{d}x = \varepsilon_k f(\alpha_k) \quad \alpha_k \in (\alpha, \alpha+\varepsilon_k)$$

从而 $0 \leqslant |f(\alpha_k)| \leqslant M\varepsilon_k^{\delta}$，$(k=1,2,\cdots)$。

令 $k \to +\infty$，$f(\alpha_k) \to 0$，又 $\alpha_k \to \alpha$，$f(x)$ 连续，因此 $f(\alpha)=0$，由$\alpha \in (a,b)$的任意性可知，$f(x) \equiv 0 \quad x \in (a,b)$

再由$f(x)$在端点处的连续性知$f(a)=f(b)$

因此 $f(x) \equiv 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b)$

例 22 设$\alpha>0, \beta>0, 0<a<b$，证明下列不等式

$$\left|\int_a^b \sin(nt-\frac{\beta}{t^\alpha})\mathrm{d}t\right| < \frac{2}{n}，\quad \left|\int_a^b \cos(nt-\frac{\beta}{t^\alpha})\mathrm{d}t\right| < \frac{2}{n}。$$

证明 令 $\varpi = t - \dfrac{\beta}{nt^\alpha} \quad (t>0)$

因为 $\dfrac{d\varpi}{dt} = 1 + \dfrac{\alpha\beta}{nt^{\alpha+1}} > 0$，所以 ϖ 是 t 严格递增函数。用 $t=t(\varpi)$ 表示它的反函数。则

$$\frac{dt}{d\varpi} = (1+\frac{\alpha\beta}{nt^{\alpha+1}})^{-1} > 0，\quad \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\varpi^2} = (1+\frac{\alpha\beta}{nt^{\alpha+1}})^{-2}\frac{\alpha(\alpha+1)\beta}{nt^{\alpha+2}}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varpi} > 0$$

令 $\varpi_a = a - \dfrac{\beta}{na^\alpha}$，$\varpi_b = b - \dfrac{\beta}{nb^\alpha}$，由积分第二中值定理得到，

$$\int_a^b \sin(nt-\frac{\beta}{t^\alpha})\mathrm{d}t = \int_{\varpi_a}^{\varpi_b} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varpi}\sin n\varpi \mathrm{d}\varpi$$

$$= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varpi}\Big|_{\varpi_b} \int_\xi^{\varpi_b} \sin n\varpi \mathrm{d}\varpi$$

$$=(\frac{\mathrm{d}\varpi}{\mathrm{d}t}|_{t=b})^{-1}(-\frac{1}{n}\cos n\varpi)|_{\xi}^{\varpi_b}$$

$$=-\frac{1}{n}(1+\frac{\alpha\beta}{nb^{\alpha+1}})^{-1}[\cos n\varpi_b-\cos n\xi]$$

所以 $\left|\int_a^b\sin(nt-\frac{\beta}{t^{\alpha}})\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{n}|\cos n\varpi_b-\cos n\xi|\leqslant\frac{2}{n}$

上面两个等式不可能同时成立，事实上，第一个等式只有在 $\cos n\varpi_b-\cos n\xi=0$ 时成立，这时第二个等式不成立。于是我们得到 $\left|\int_a^b\sin(nt-\frac{\beta}{t^{\alpha}})\mathrm{d}t\right|<\frac{2}{n}$。同理可以证明第二式。

例 23 设 $f(x)$ 是一定义在闭区间 $[0,1]$ 上的可微函数，且 $|f'(x)|\leqslant M$，$0<x<1$，证明 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|\leqslant\frac{M}{n}$。

证明 令 $E_k=\int_{(k-1)/n}^{k/n}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$，由积分第一中值定理，存在 $\eta_k\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$，使得 $\int_{(k-1)/n}^{k/n}f(x)\mathrm{d}x=f(\eta_k)\frac{1}{n}$。

由拉格朗日微分中值定理得到，存在 $\xi_k\in[\eta_k,\frac{k}{n}]$，使得

$$f(\eta_k)-f(\frac{k}{n})=(\eta_k-\frac{k}{n})f'(\xi_k)$$

于是，有 $|E_k|=\frac{1}{n}\left|f(\eta_k)-f(\frac{k}{n})\right|$

$$=\frac{1}{n}\left|\eta_k-\frac{k}{n}\right|\cdot|f'(\xi_k)|\leqslant\frac{M}{n^2}$$

从而有，$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}E_k\right|\leqslant\frac{M}{n}$

例 24 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明

$$\lim_{h\to0+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\pi f(0)$$

证明 注意到

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0+}\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

因此只需证明 $\lim\limits_{h\to 0+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x=0$

这由 $\lim\limits_{h\to 0+}\int_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x=0$

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\int_{\sqrt{h}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x=0$$

三式即得。

上面的第一式由

$$\left|\int_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M\int_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2M\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{-\sqrt{h}}\to 0\quad (h\to 0+)$$

得出。其中 M 是函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值。同理可以得到上面的第三式。由积分中值定理有

$$\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\mathrm{d}x=[f(\xi)-f(0)]\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}$$

$\to 0\cdot(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=0\quad (h\to 0+)$ 　　　于是得到第二式。

例 25 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的连续函数，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

证明 对于任意正整数 n，有

$$\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi/n}^{2\pi k/n}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$$

由积分第一中值定理知，存在 $\xi_k\in[\frac{2(k-1)\pi}{n},\frac{2k\pi}{n}]$，使得

$$\int_{2(k-1)\pi/n}^{2\pi k/n}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=f(\xi_k)\int_{2(k-1)\pi/n}^{2\pi k/n}|\sin nx|\mathrm{d}x$$

我们注意到

$$\begin{aligned}\int_{2(k-1)\pi/n}^{2\pi k/n}|\sin nx|\mathrm{d}x&=\int_{2(k-1)\pi/n}^{(2k-1)\pi/n}|\sin nx|\mathrm{d}x+\int_{(2k-1)\pi/n}^{2\pi k/n}|\sin nx|\mathrm{d}x\\&=\int_{2(k-1)\pi/n}^{(2k-1)\pi/n}\sin nx\mathrm{d}x-\int_{(2k-1)\pi/n}^{2\pi k/n}\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin u\mathrm{d}u+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\frac{4}{n}\end{aligned}$$

所以 $\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\frac{4}{n}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$

其中 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\frac{2\pi}{n}$， $x_k=\frac{2k\pi}{n}$ ，由于 $f(x)$ 是连续函数，它在 $[0,2\pi]$ 上是可积的，且 $n\to\infty$ 时， $\Delta x_k\to 0$ ，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x$$

2.3 自测题及提示

2.3.1 自测题

1．设 $a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$ ，证明方程 $a_1\cos x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在 $(0,\pi/2)$ 内至少有一个实根。

2．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内可微，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$ 。

3．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(0)=0$ ， $|f'(x)|\leqslant M|f(x)|$ ， M 是非负常数，证明 $f(x)\equiv 0$ 。

4．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $p+q$ 次连续可微，在 (a,b) 内有 $p+q+1$ 阶导数，而且 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(p)}(a)=0$ ， $f(b)=f'(b)=\cdots=f^{(q)}(b)=0$ ，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使 $f^{(p+q+1)}(\xi)=0$ 。

5．设 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可微，且 $0<x_1<x_2$ ，试证明

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1&x_2\\f(x_1)&f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),\qquad x_1<\xi<x_2$$

6．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

7．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有有界的 $n+1$ 阶导数，而且 $f^{(n)}(a)\neq 0$，证明泰勒展开式 $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots\dfrac{h^{n-1}f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+\dfrac{h^n(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(a+\theta h)}{(n-1)!}$ 中的 θ 满足 $\lim\limits_{h\to0}\theta=1-\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$。

8．设实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足条件 $\dfrac{a_0}{1}+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 至少有一个实根。

9．设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，证明 $f(x)\equiv 0$ （$-\infty<x<+\infty$）。

10．设 $a>0$，$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可微，证明

$$f(0)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x。$$

11．设 $\beta>0$，$0<a<b$，证明必有 θ，$|\theta|<1$，使得

$$\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\theta。$$

2.3.2 自测题提示

1．构造函数 $a_1\sin x+\dfrac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\dfrac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$ 利用洛尔定理即得。

2．令 $g(x)=x^2$，对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 利用柯西微分中值定理即得。

3．利用拉格朗日微分中值定理和数学归纳法即得。

4．多次利用洛尔定理即得。

5．对函数 $u(x)=f(x)/x$，$v(x)=1/x$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上应用柯西微分中值定理即得。

6．利用极限的定义以及柯西微分中值定理对函数进行估计即得。

7．由洛尔定理可以证明上面泰勒公式成立，两次运用泰勒公式解出θ的表达式，再求极限即得。

8．构造函数$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，考查积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，并利用积分第一中值定理即得。

9．对$f(x)$的泰勒展开式并利用积分第一中值定理估计$f(x)$的大小，再求极限。或构造函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$，利用导数的性质也可以证明。

10．用积分第一中值定理和牛顿莱布尼兹公式对$f(0)$估计即得。

11．取$f(x)=\mathrm{e}^{-\beta x}/x$，由积分第二中值定理即得。

第3章　不等式

3.1　内容提要

不等式在高等数学里面发挥着极其重要的作用。对于深入研究数列、函数性态、判断级数敛散性等方面，不等式都是不可缺少的。本章旨在探讨高等数学竞赛中常见的一系列著名不等式及一些经典不等式题目。尽管现代数学中不等式已经发展成为一个庞大的分支，但对于目前理工科大学生而言，熟练掌握本章的不等式内容是非常重要的。本章大致分为数项不等式、微分不等式、积分不等式、函数不等式四部分。由于知识上的联系，它们之间有时互相渗透。

3.2　例题解析

例 1　若 $x_i \in R^+, i=1,2,\cdots,n$ 且 $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$，则 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n$，等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时成立。

凸函数的几种定义及其关系

定义 1　设函数 $f(x), x \in I$. 称 $f(x)$ 在 I 上为凸函数，当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $\lambda \in (0,1)$，有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{3-1}$$

定义 2　设函数 $f(x), x \in I$. 称 $f(x)$ 在 I 上为凸函数，当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I$，有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$　　(3-2)

定义 3　设函数 $f(x), x \in I$. 称 $f(x)$ 在 I 上为凸函数，当且仅当 $\forall x_1, x_2 \cdots, x_n \in I$，有（Jensen 不等式）

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \tag{3-3}$$

评注　特别指出上述三个定义中若≤改为<，则是严格凸函数的

定义。

命题1　定义2$\Leftrightarrow$ 定义3

证明　定义3$\Rightarrow$定义2，显然成立。下证定义2$\Rightarrow$定义3

（1）　由式（3-2）知式（3-3）当$n=2$时成立。则$n=4$时，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)$$

$$\leqslant\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2}$$

$$\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}\quad 成立$$

当$n=2^k$时，应用式（3-2）k次可得

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^k})}{2^k}$$

这说明式（3-3）对一切$n=2^k$成立。

（2）　对任意自然数n，总$\exists k$及k_1，使$n+k=2^{k_1}$，此时有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+k}}{n+k}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n+k})}{n+k}$$

在上式中令$x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=x_{n+k}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，则有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+\frac{k}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n+k}\right)$$

$$\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+kf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)}{n+k}$$

所以$f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$　成立。

命题2　若$f(x)$为连续函数，则定义1$\Leftrightarrow$定义2，3

证明　定义2，3$\Rightarrow$定义1，$\forall x_1,x_2\in I$

（1）当$\lambda \in Q^+$时，令$\lambda = q/p, (p,q)=1$, 则

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=f(\frac{q}{p}x_1+(1-\frac{q}{p})x_2)=f(\frac{qx_1+(p-q)x_2}{p})$$

$$\leqslant \frac{qf(x_1)+(p-q)f(x_2)}{p}=\frac{q}{p}f(x_1)+(1-\frac{q}{p})f(x_2)$$

$$=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$ 成立

（2）当$\lambda \in \overline{Q}$时，取$\{\lambda_n\} \in Q^+$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$，则由（1）知

$f(\lambda_n x_1+(1-\lambda_n)x_2)\leqslant \lambda_n f(x_1)+(1-\lambda_n)f(x_2)$　两边取极限得，

$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

命题 3　设$f(x)$为连续的凸函数，则有如下结论，若

$p_k \in R^+, k=1,2,\cdots,n$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}p_k=1$. 则$\forall x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$, 有

$f(\sum\limits_{k=1}^{n}p_k x_k)\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}p_k f(x_k)$。

证明时也分$p_1,p_2,\cdots,p_n$均为有理数及不全为有理数两种情况，请读者自证。

命题 4　当$f''(x)\geqslant 0$时，$f(x)$为凸函数。

例 2　（Cauchy 不等式）$(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2)\geqslant(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i b_i)^2$，其中

$a_i,b_i \in R, i=1,2,\cdots,n.$ 当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时等号成立。

证明　运用 Jensen 不等式。设$f(x)=x^2$，因为

$f''(x)=2\geqslant 0$，所以$f(x)$为凸函数

即　$$(\sum_{i=1}^{n}p_i x_i)^2\leqslant \sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2 \tag{3-4}$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1, p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$

任给一组正数$q_1,q_2,\cdots,q_n$。令$p_i=q_i/\sum\limits_{i=1}^{n}q_i, i=1,2,\cdots,n$。则代入式（3-4）有

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n}q_ix_i)^2}{(\sum_{i=1}^{n}q_i)^2}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}q_ix_i^2}{\sum_{i=1}^{n}q_i}\Rightarrow(\sum_{i=1}^{n}q_ix_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}q_i\sum_{i=1}^{n}q_ix_i^2$$

令 $a_i=\sqrt{q_i}x_i, b_i=\sqrt{q_i}$ $\quad i=1,2,\ldots,n$,则有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \tag{3-5}$$

显然式（3-4）要成立，应有 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，但 $x_i=a_i/b_i$，故有 $a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n$ 时式（3-5）等号取得。

评注 1 证明过程限制 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 只能取正数。事实上，从 Cauchy 不等式本身来看，取负数更成立。

评注 2 柯西不等式有积分形式

$$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

其中 $f(x),g(x)\in C\,[a,b]$。

例 3 （均值不等式）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为正数，则

$$\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)/n}\geqslant(\sum_{i=1}^{n}x_i)/n\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant n/(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i})。$$

例 4 （Bernoulli 不等式）

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant1+x_1+x_2+\cdots+x_n$，其中 $x_i(i=1,2\cdots,n)$ 同号且均大于 -1。

特别当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=h$ 时，有 $(1+h)^n\geqslant1+nh$， $h>-1$。此为经常用到的著名不等式。

例 5 （Minkowski 不等式）

（1） $$[(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{\frac{1}{2}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)^{\frac{1}{2}}]^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2$$

（2） $$(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}+(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}\geqslant(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $f(x)$， $g(x)\in C[a,b]$

化简整理后，运用 Cauchy 不等式即可证明之。

例 6 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

证明 令 $p_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，则

$$p_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

$$=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{1}{(2n+1)p_n}$$

故 $p_n^2<\dfrac{1}{2n+1}$，即 $p_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

另一方面，

$$p_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!2n}=\frac{1}{4np_n}$$

故 $p_n^2>\dfrac{1}{4n}$，即 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<p_n$

从而 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ **证完**

例 7 证明 $\dfrac{3n+1}{2n+2}<\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^n<2$

其中 $n\in N,n\geqslant 2$。

分析 经验告诉我们，此题可能与定积分“n 等分”有关。可以运用函数 $f(x)=x^n$ 来研究。

证明 考虑函数 $f(x)=x^n$， $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$ ，故 $f(x)$ 为严格凸函数，如图 3-1 所示，线段 OA 被 n 等分。

我们取一般位置，即某一等分（见图 3-1）进行讨论。

记阴影部分，即小曲边梯形 $a_1c_1c_2b_2$ 的面积为 s_k； 小梯形 $a_1c_1c_2b_2$ 的面积为 s_k^*，记曲线 OB 与线段 OA,AB 所围之曲边三角形的面积为 S_1，则 $S_1=\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}$

显然有如下结论：（1）$s_k < s_k^*$；（2）$\sum s_k = S_1 = \frac{1}{n+1}$；

（3）

$\sum s_k^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[(\frac{k-1}{n})^n + (\frac{k}{n})^n]\frac{1}{n} =$

$\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^n - \frac{1}{2})$。

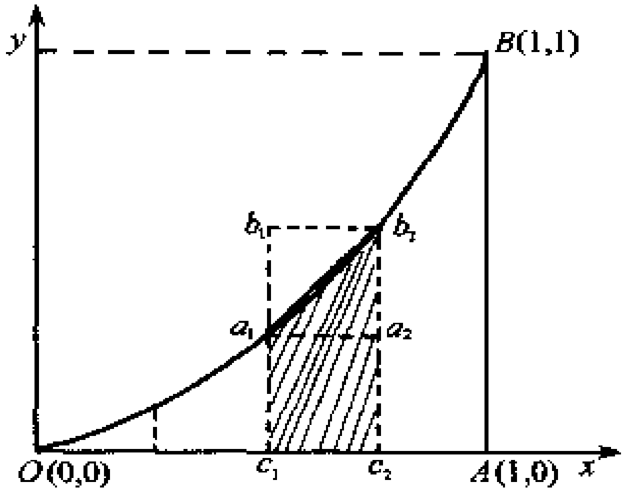


图 3-1

利用上述三个结论，即可得到

$$\frac{3n+1}{2n+2} < (\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + \cdots + (\frac{n}{n})^n$$

另一方面，如图 3-1 所示，$\Delta a_1a_2b_2 \cong \Delta b_2b_1a_1$，线段 a_1b_2 与弧 a_1b_2 所围图形 δ_k 被 $\Delta a_1a_2b_2$ 所包含，因此 $S_{\delta_k} < S_{\Delta b_2b_1a_1}$，所以 $s_k + S_{\delta_k} < s_k + S_{\Delta b_2b_1a_1}$，即 $s_k^* < s_k + S_{\Delta b_2b_1a_1}$

所以 $\sum s_k^* < \sum s_k + \sum S_{\Delta b_2b_1a_1}$

$$故\ \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^n - \frac{1}{2}) < \frac{1}{n+1} + \sum S_{\Delta b_2b_1a_1} \tag{3-6}$$

n 个小三角形 $\Delta b_2b_1a_1$ 高的总和为 1，底边长均为 $1/n$，因此 $\sum S_{\Delta b_2b_1a_1} = \frac{1}{2n}$，代入式（3-6），整理得

$(\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + \cdots + (\frac{n}{n})^n < 2$ 　　　　证完

例 8　设函数 $f(x)$ 在[a,b]上二阶可导，且 $f(a) = f(b) = 0$ 及 $|f''(x)| \leqslant 8$，证明 $\left|f(\frac{a+b}{2})\right| \leqslant (b-a)^2$。

分析　依据题目条件及要求，应把 $f(a)$、$f(b)$ 在 $x = (a+b)/2$ 点处展开，或者把 $f[(a+b)/2]$ 在 $x = a, x = b$ 两点处分别展开，就能找出正确的解决方法。

证明　把 $f(a)$、$f(b)$ 在 $x = (a+b)/2$ 点处展开，得

$$f(a) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(a - \frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2}f''(x_1)(a - \frac{a+b}{2})^2$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(x_2)(b-\frac{a+b}{2})^2$$

其中 $x_1\in(a,\frac{a+b}{2})$， $x_2\in(\frac{a+b}{2},b)$

因为 $f(a)=f(b)=0$,两式相加得

$$0=2f[(a+b)/2]+(b-a)^2[f''(x_1)+f''(x_2)]/8$$

所以 $2|f(\frac{a+b}{2})|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}(|f''(x_1)|+|f''(x_2)|)\leqslant 2(b-a)^2$

故 $|f(\frac{a+b}{2})|\leqslant(b-a)^2$　　证完

例 9　设 $f(x)$ 在[a,b]上有 $|f''(x)|\leqslant M$,且 $f[(a+b)/2]=0$ 及 $(b-a)\leqslant 1$　证明 $|f(a)+f(b)|\leqslant M/4$。

证明　把 $f(a)$， $f(b)$ 分别在 $x=(a+b)/2$ 点处展开，结合 $f[(a+b)/2]=0$，得

$$f(a)=f'(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(x_1)(a-\frac{a+b}{2})^2$$

$$f(b)=f'(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(x_2)(b-\frac{a+b}{2})^2$$

两式相加，得

$$f(a)+f(b)=(b-a)^2[f''(x_1)+f''(x_2)]/8$$

因此有 $|f(a)+f(b)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}[|f''(x_1)|+|f''(x^2)|]$

$$\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}2M\leqslant\frac{M}{4}$$　证完。

例 10　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数，且 $f(a)=0$。证明 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x$。

分析　题目结论中要求出现导函数 $f'(x)$，联系 $f(a)=0$，我们想到拉格朗日中值公式，但是 $f(x)=f'(\xi)(x-a)$ 中， $f'(\xi)$ 不能被积分，于是我们想到 $f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$，建立 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 之间的关系。

证明 因为 $f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$，由 Cauchy 不等式得

$$f^2(x)=(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t)^2\leqslant\int_a^x f'^2(t)\mathrm{d}t\int_a^x 1^2\mathrm{d}t$$
$$\leqslant(x-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x$$

例 11 已知函数 $f(x)\in C[0,1]$，且 $\forall x,y\in[0,1]$，有 $|f(x)-f(y)|<M|x-y|$，证明 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|<\frac{M}{2n}$。

分析 因为函数连续，所以在比较小的范围内变化不大，故可把积分区间 n 等分，$f(x)$ 在每一个小区间上的积分与相应的 $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ 比较。

证明 $|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})|$

$$=|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})\mathrm{d}x|$$

$$=|\sum_{k=1}^n(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-f(\frac{k}{n})]\mathrm{d}x|\leqslant\sum_{k=1}^n|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-f(\frac{k}{n})]\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}M|x-\frac{k}{n}|\mathrm{d}x$$

$$=M\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(\frac{k}{n}-x)\mathrm{d}x=\frac{M}{2n}$$

例 12 设 $f''(x)\leqslant 0$，$x\in[0,1]$，则 $\int_0^1 f(x^2)dx\leqslant f(1/3)$

分析 由条件知道该函数为凹函数，可以用 Jensen 不等式来处理；另外，该函数存在二阶导数，故又可考虑泰勒展开。

证明 1 因为 $f''(t)\leqslant 0$，$t\in[0,1]$

所以 $f(t)$ 为凹函数，故 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \leqslant f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i)$

令 $t_i = x_i^2 = (\frac{i}{n})^2 \quad i=1,2,\cdots,n$,有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^2) \leqslant f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2)$

上式左边表示复合函数 $f(x^2)$ 在 n 个[0，1]区间上等分点处值的算术平均。其极限显然依黎曼积分定义为 $\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x$

两边取极限，得

$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x \leqslant f(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}) = f(\frac{1}{3})$ 　　证完

证明 2　把 $f(x^2)$ 在 $x=1/3$ 点处展开，得

$$f(x^2) = f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^2 - \frac{1}{3})^2$$

因为 $f''(\xi) \leqslant 0$，所以 $f(x^2) \leqslant f(\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3})$

两边积分，得

$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(\frac{1}{3})\mathrm{d}x + \int_0^1 f'(\frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3})\mathrm{d}x = f(\frac{1}{3})$ 　　证完

例 13　函数 $f(x) \in C[a,b]$, 且满足

$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$，求证

$$f(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

证明　（1）取 $x_k = \frac{k}{n}(b-a)+a, k=1,2,\cdots,n$ 由 Jensen 不等式得

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

或 $f(a + \frac{(n+1)n(b-a)}{2n}) \leqslant \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_k)$

两边令 $n\to\infty$，得

$$f(\frac{a+b}{2}) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

（2）$f(x) = f(\frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a) \leqslant \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a)$

$$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

两边积分，得 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x+\int_a^b f(a)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f(b)-f(a)}{2}(b-a)+f(a)(b-a)$$

即 $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$ 证完

例 14 设函数 $f(x)>0$， $f''(x)\leqslant 0$，则 $f(x)\leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

证明 1 设函数在 $x=x_0$ 取最大值，把最大值点在任意点处展开

$$f(x_0)=f(x)+f'(x)(x_0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x_0-x)^2$$

$$\leqslant f(x)+f'(x)(x_0-x)$$

两边积分，得

$$\int_a^b f(x_0)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)(x_0-x)\mathrm{d}x$$

即 $$(b-a)f(x_0)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x+x_0\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x-\int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+x_0[f(b)-f(a)]-\int_a^b x\mathrm{d}f(x)$$

$$=2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-x_0)f(b)-(x_0-a)f(a)$$

$$\leqslant 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

故 $$f(x_0)\leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值，从而有

$$f(x)\leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \forall x\in[a,b]$$

证明 2 $\forall x_1,x_2$ 满足 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$。当 $x\in[x_1,x_2]$ 时，有

$$f(x)=f\left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2\right)$$

$$\geqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

两边积分，得

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{x_2 - x_1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

设 x_0 为 $f(x)$ 的最大值点，即 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$　利用上式，有

$$\int_{a}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{x_0 - a}{2}[f(a)+f(x_0)]$$

$$\int_{x_0}^{b} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{b - x_0}{2}[f(x_0)+f(b)]$$

两式相加，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{b-a}{2}f(x_0)+\frac{x_0-a}{2}f(a)+\frac{b-x_0}{2}f(b)$$

$$\geqslant \frac{b-a}{2}f(x_0)$$

即 $f(x_0)\leqslant \dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，由于 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，因此，有

$$f(x)\leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \forall x\in[a,b]$$

例 15　设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$，又 $x=u(t)$ 为任意连续函数，证明 $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant f[\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a u(t)\mathrm{d}t]$。

分析　这是一个凸函数的积分问题，而 Jensen 不等式就是联系凸函数与积分的一个好工具。

证明　把 $[0,a]$ 区间等分成 n 个小区间，取每一个小区间的右端点 t_i，$i=1,2,\cdots,n$，代入 $x=u(t)$ 得 $x_i=u(t_i)$，$i=1,2,\cdots,n$

因为 $f''(x)\geqslant 0$，知 $f(x)$ 为凸函数

所以 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\geqslant f(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i)$ 即　$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f[u(t_i)]\geqslant f[\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(t_i)]$

或 $\dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a}{n} f[u(t_i)]\geqslant f[\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{a}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(t_i)]$

两边取极限，得

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant f[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t] \qquad \text{证完}$$

例 16 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶导数连续，且 $f(a)=f(b)=0$，证明 $\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq\frac{4}{b-a}$。

分析 题目中 $f(x)$ 处于分母位置，不便于积分，应当通过放缩消去分母。另外，应把 $f''(x)$ 与 $f'(x)$ 建立联系，从而 $f'(x)$ 又可与 $f(x)$ 在题目中的条件 $f(a)=f(b)=0$ 建立关系。

证明 令 $\left|f(x_0)\right|=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|$，则易知 $x_0\in(a,b)$

在区间 $[a,x_0]$,$[x_0,b]$ 上分别运用拉格朗日中值公式，得

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=\frac{f(x_0)}{x_0-a}\qquad x_1\in(a,x_0)$$

$$f'(x_2)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}=\frac{-f(x_0)}{b-x_0}\qquad x_2\in(x_0,b)$$

因此
$$\begin{aligned}\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx&\geq\frac{1}{M}\int_a^b\left|f''(x)\right|dx\geq\frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2}\left|f''(x)\right|dx\\&\geq\frac{1}{M}\left|\int_{x_1}^{x_2}f''(x)dx\right|\\&=\frac{1}{M}\left|f'(x_2)-f'(x_1)\right|=\frac{1}{M}\left|\frac{-f(x_0)}{b-x_0}-\frac{f(x_0)}{x_0-a}\right|\\&=\frac{\left|f(x_0)\right|}{M}\left|\frac{1}{b-x_0}+\frac{1}{x_0-a}\right|=\frac{b-a}{(b-x_0)(x_0-a)}\\&\geq\frac{4}{b-a}\end{aligned}$$
证完

评注 本题最后一步并非由于 x_0 能够取到 $(a+b)/2$ 得到的。事实上，x_0 是既定的，但这并不妨碍 $(b-x_0)(x_0-a)$ 有界。例如，不等式 $\sin\pi/3\leqslant1$。显然 $\frac{\pi}{3}\in[0,\pi/2]$ 为一常数，而 $\sin x\leqslant1$，$\forall x\in[0,\pi/2]$。

例 17 函数 $f(x)$ 在[a,b]上有连续导数，则有

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b\left|f'(x)\right|dx\geq\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|$$

分析 连续函数在闭区间上能取到最大值，即有

$\left|f(x_0)\right|=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|$；由积分中值定理，$f(x_1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，因此，$x_0$，$x_1$两点是解决问题的关键。

证明 令$\left|f(x_0)\right|=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right| \qquad x_0\in[a,b]$

$$\left|f(x_1)\right|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \qquad x_1\in[a,b]$$

若x_0，x_1 两点重合，即最大值与平均值相等，可知$f(x)$为常数函数。此时命题显然成立。若x_0，x_1 两点不重合，无妨设$x_0<x_1$，则

$$\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0}^{x_1}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \geqslant \left|\int_{x_0}^{x_1}f'(x)\mathrm{d}x\right| = \left|f(x_1)-f(x_0)\right|$$
$$\geqslant \left|f(x_0)\right|-\left|f(x_1)\right|$$

因此，有$\left|f(x_1)\right|+\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \geqslant \left|f(x_0)\right|$

即 $\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \geqslant \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|$ 　　证完

例 18 设函数$f(x)$在[0，1]上有一阶连续导函数，且$f(0)=f(1)=0$，求证$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{4}\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|$。

分析 令$M=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|$,由拉格朗日中值公式，$f(x)=f'(\xi)x$，运用此式估计$f(x)$在[0，1]上的积分，经验证，这是很粗糙的，而且仅仅用上了条件$f(0)=0$，而$f(1)=0$没用到。

证明 令 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|$，由拉格朗日中值公式，$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)(x-0)$，联系$f(0)=0$，得$f(x)=f'(\xi_1)x$。
又因为 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|$，所以$-Mx\leqslant f(x)\leqslant Mx$

在 0 到 1/2 之间积分，有

$$-M\int_0^{1/2}x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{1/2}f(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_0^{1/2}x\mathrm{d}x \quad 即$$

$$-\frac{1}{8}M \leqslant \int_0^{1/2}f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{8}M \tag{3-7}$$

仍由拉格朗日中值公式

$f(1)-f(x)=f'(\xi_2)(1-x)$ 　联系$f(1)=0$，有

$-f(x)=f'(\xi_2)(1-x)$，结合 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$ 得

$$-M(1-x)\leqslant f(x)\leqslant M(1-x)$$

在1/2到1之间积分得

$$-\frac{1}{8}M\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{8}M \tag{3-8}$$

式（3-7）、式（3-8）相加得 $-\frac{1}{4}M\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}M$

即 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}M$ 证完

例 19 设 $x>0,y>0$，证明当 $\beta>\alpha>0$ 时，有 $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$。

证明 （1）当 $x=y$ 时，不等式成为

$(2x^\alpha)^{1/\alpha}>(2x^\beta)^{1/\beta}$ 即 $2^{1/\alpha}>2^{1/\beta}$，显然成立。

（2）当 $x\neq y$ 时，无妨设 $y>x>0$。记 $c=y/x>1$

设 $f(t)=(x^t+y^t)^{1/t}$ $t>0$ 则原不等式变为

$f(\alpha)>f(\beta)$ $0<\alpha<\beta$

故只要证 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减

而 $f(t)=x(1+c^t)^{1/t}$ 故令 $g(t)=(1+c^t)^{1/t}$，因为 x 是常数，只须证 $g(t)$ 严格单减即可。

而 $g'(t)=g(t)\dfrac{c^t\ln c^t-(1+c^t)\ln(1+c^t)}{t^2(1+c^t)}<0$

故 $g(t)$ 严格单减，所以 $f(t)=xg(t)$ 也严格单减

所以 当 $0<\alpha<\beta$ 时，有 $f(\alpha)>f(\beta)$

即 $(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}>(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}$。

例 20 证明 $xy\leqslant x\ln x+e^{y-1}$ $(x>0)$

分析 证明函数不等式的一般方法为构造辅助函数，其基本步骤为求导，确定函数单调性；代入初值，确定大小。

证明　构造辅助函数

$f(x)=x\ln x-xy+e^{y-1}$，求导，得 $f'(x)=\ln x+1-y$

（1）当 $x>e^{y-1}$ 时，有 $f'(x)>0$

此时 $f(x)$ 单调上升，所以 $f(x)>f(e^{y-1})=0$，即

$$x\ln x-xy+e^{y-1}>0 \tag{3-9}$$

（2）当 $0<x<e^{y-1}$ 时，有 $f'(x)<0$，此时，$f(x)$ 单调下降

所以 $f(x)>f(e^{y-1})=0$，即

$$x\ln x-xy+e^{y-1}>0 \tag{3-10}$$

结合式(3-9)、式(3-10)两式，对 $\forall x>0$，有

$xy\leqslant x\ln x+e^{y-1}$　成立　　　　证完

例 21　设函数 $f(x)\in C[a,b]$，不恒为零，满足 $0\leqslant f(x)\leqslant M$，则

$$(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x)^2+(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x)^2+\frac{M^2(b-a)^4}{12}$$
$$\geqslant(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)^2$$

分析　此题看似可以运用微分中值公式加以解决，但实际上，$f(x)$ 在定义域上仅仅连续，并不一定可导，故此法不通。由于只要 $b>a$ 不等式就成立，故可把 b 作为变量来处理，因此可以用变上限积分来解。

证明　构造辅助函数

$$F(t)=(\int_a^t f(x)\cos x\mathrm{d}x)^2+(\int_a^t f(x)\sin x\mathrm{d}x)^2+\frac{M^2(t-a)^4}{12}-(\int_a^t f(x)\mathrm{d}x)^2,$$

求导得到

$$F'(t)=2f(t)\cos t\int_a^t f(x)\cos x\mathrm{d}x+2f(t)\sin t\int_a^t f(x)\sin x\mathrm{d}x+$$
$$\frac{M^2(t-a)^3}{3}-2f(t)\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{M^2(t-a)^3}{3}-2f(t)\int_a^t f(x)[1-\cos(x-t)]\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \frac{M^2(t-a)^3}{3} - 2M^2\int_a^t [1-\cos(x-t)]\mathrm{d}x$$

$$= 2M^2\left(\frac{(t-a)^3}{6} - (t-a) + \sin(t-a)\right) \tag{3-11}$$

令 $g(t) = \frac{(t-a)^3}{6} - (t-a) + \sin(t-a)$，则

$$g'(t) = \frac{(t-a)^2}{2} - 1 + \cos(t-a) \tag{3-12}$$

$$g''(t) = (t-a) - \sin(t-a) \geqslant 0,\ t \geqslant a \tag{3-13}$$

由式(3-13)知 $g'(t)$ 单调上升

所以 $$g'(t) \geqslant g'(a) = 0 \tag{3-14}$$

由式(3-14)知 $g(t)$ 单调上升

所以 $$g(t) \geqslant g(a) = 0 \tag{3-15}$$

由式(3-15)知

$F'(t) \geqslant 2M^2 g(t) \geqslant 0$，所以 $F(t)$ 单调上升

结合 $b > a$，有 $F(b) \geqslant F(a)$　即

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{M^2(b-a)^4}{12} \geqslant \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

例 22　设 $x \in [0,1], p > 1$，则　$2^{1-p} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$

证明　设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$，则

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}$$

令 $f'(x) = 0$，得驻点 $x = 1/2$，当 $x \in [0,1/2)$ 时，$f'(x) < 0$

当 $x \in (1/2,1]$ 时，$f'(x) > 0$，所以 $f(1/2) = 2^{1-p}$ 为函数的最小值。

又因为 $f(0) = f(1) = 1$，所以 $2^{1-p} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$

3.3 自测题及提示

3.3.1 自测题

1. 证明 $(1+\frac{1}{n})^n < \mathrm{e} < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \quad n \in N$

2. 证明 $0 < \mathrm{e}-(1+\frac{1}{n})^n < \frac{3}{n} \quad n \in N$

3. 证明 $(\frac{n+1}{2})^n > n!$

4. 证明 $2!4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n$

5. 证明 $\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} \quad n,p \in N$

6. 证明 $0 < \frac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{n})^n} - 1 < \frac{1}{2n} \quad n \in N$

7. 设 $s>1$，证明 $\frac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots + n^s < \frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}$

8. 设函数 $f(x)$ 在[0，2]上二次连续可微，$f(1)=0$，证明 $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M/3$，其中 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\left|f''(x)\right|$。

9. 设 $f(x)\in C[0,1]$，$f(x)>0$，证明 $e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

10. （1） $(\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{a_k^2+b_k^2})^2 \geqslant (\sum\limits_{k=1}^n a_k)^2+(\sum\limits_{k=1}^n b_k)^2$

（2） $(\int_a^b\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n f_k^2(x)}\mathrm{d}x)^2 \geqslant \sum\limits_{k=1}^n(\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x)^2$

11. 设 $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)\geqslant 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$，$k\in R$，则 $(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x)^2+(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x)^2 \leqslant 1$。

12. $f(x)$ 在[a,b]上有连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，则

$$\max_{x\in[a,b]}|f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

13 设 $f(x)$ 在 [a,b]上有连续导数 $f(a)=0$ 则

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x$$

14 设 $f(x)$ 在 [a,b]上有连续导数 $f(a)=f(b)=0$ 则

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x$$

15 设函数[0, a]上有二阶连续导数 且 $|f''(x)|\leqslant M$ 又 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值。证明 $|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$。

16 (Young 不等式)设 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续 严格单调上升 $\phi(x)$ 为其反函数，$\varphi(0)=\phi(0)=0$ $a,b\in R^+$ 证明

$$\int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x+\int_0^b \phi(x)\mathrm{d}x \geqslant ab。$$

17 $n\in N$, $x\in(0,1)$ ，则 $x^n(1-x)<\dfrac{1}{ne}$

18 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为一组正数 证明

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots$$

19 $0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<\pi$ 证明

$$\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$$

20 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)$ 单调递减。$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，记 $\lambda=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ ，则 $\int_{b-\lambda}^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a+\lambda} f(t)\mathrm{d}t$。

3 3 2 自测题提示

1 运用 Bernoulli 不等式证出 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调上升，$\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 单调下降，进而

$2<(1+\frac{1}{2})^2<\cdots<(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}<\cdots<(1+\frac{1}{2})^3<4$ ，数列有界。

2. 利用第 1 题结果。

3. 运用算术平均大于几何平均。

4. 运用数学归纳法。

5. $\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{(n+k)(n+k-1)}=\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}$ 。

6. 运用不等式 $e<(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}$ 或把 n 改为 x，构造辅助函数，用求导的方法证明。

7. 参考例 8 的证明方法。

8. 把 $f(x)$ 在 $x=1$ 点处展开，再结合 $-M\leqslant f''(\xi)\leqslant M$，得到函数不等式，然后积分就能得到结论。

9. 利用函数 $g(x)=\ln f(x)$ 的 Jensen 不等式。

10. 略

11. 运用积分形式的 Cauchy 不等式。

12. 仿例 20 的证明方法。

13. 令 $g(x)=\int_a^x|f'(t)|dt$,则 $g'(x)=|f'(x)|$

$$|f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)dt\right|\leqslant\int_a^x|f'(t)|dt=g(x)$$ 进而

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|dx\leqslant\int_a^b g(x)g'(x)dx$$ 。

14. 参考自测题 13 的方法，把[a,b]二等分，分两段积分

15. 设 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[0,a]}f(x)$，则 $f'(x_0)=0$。

16. 左边 $=\int_0^a\varphi(x)dx+b\phi(b)-\int_0^{\phi(b)}\varphi(x)dx$

$$=b\phi(b)-\int_a^{\phi(b)}\varphi(x)dx$$

$$\geqslant b\phi(b)-\varphi[\phi(b)][\phi(b)-a]=b\phi(b)-b[\phi(b)-a]=ab$$

（无妨设 $\phi(b)>a$）　请读者画出草图，数形结合，便于分析。

17. $f(x)=x^n(1-x)$ 的最大值点为 $x_0=n/(n+1)$，再结合 $e<(1+1/n)^n$ 可得结论。

18. 利用函数 $f(x)=x\ln x$ 的 Jensen 不等式

19. 利用凸函数性质。

20. 右$=\int_a^{a+\lambda} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{a+\lambda} f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_{a+\lambda}^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_a^{a+\lambda} f(t)[1-g(t)]\mathrm{d}t-\int_{a+\lambda}^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

$$\geqslant f(a+\lambda)\int_a^{a+\lambda}[1-g(t)]\mathrm{d}t-\int_{a+\lambda}^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

$$=f(a+\lambda)[\lambda-\int_a^{a+\lambda} g(t)\mathrm{d}t]-\int_{a+\lambda}^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

$$=f(a+\lambda)\int_{a+\lambda}^b g(t)\mathrm{d}t-\int_{a+\lambda}^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{a+\lambda}^b [f(a+\lambda)-f(t)]g(t)\mathrm{d}t\text{。}$$

第4章　反向思考方法

4.1　内容提要

本章重点讨论反证法和逆向思维方法在解决高等数学问题中的应用。这些题目涉及大学高等数学各个章节的知识，具有一定的综合性。关于反证法的几点讨论：①为什么可用反证法？我们要解决的问题总是在一定范围内成立。记范围为Ω，要解决的问题为$A=A_1\cap A_2\cap\cdots$，其对立面$A^c=\Omega-A$。要肯定A若有一定困难，可以通过否定A^c达到同样目的。②如何用反证法？假定$A^c=A_1^c\cup A_2^c\cup\cdots$成立，即$\exists n_0$，使$A_{n_0}^c$成立，由此导出矛盾即可。一般说来，在某一个（$A_{n_0}^c$）上导出矛盾要比肯定全部（$A_1\cap A_2\cap\cdots$）容易得多。③与什么内容相矛盾？与原题所给条件或解题过程中所作的假设或某些简单事实（例如$1>0,\sin^2x+\cos^2x=1$等；题目中不一定列出）相矛盾。

4.2　例题解析

例 1　设函数$f(x)\in C[0,1]$，且$f(0)=f(1)$，证明$\forall n\in N$，$\exists x_n\in[0,1]$，使得$f(x_n)=f(x_n+\dfrac{1}{n})$

分析　对于具体的n，要找出与之对应的x_n是困难的；进而要保证每一个自然数n，均须找出与之对应的x_n就更困难了。于是我们想到用反证法。其优点是只要树立一个否定的对象，然后把它否定即可。

证明　由于$n=1$时，取$x_1=0$即可，因此假定$n\geqslant 2$。
反证，假设命题不成立，即$\exists n_0\in N$，$\forall x\in[0,1]$，总有

$f(x) \neq f(x+1/n_0)$ 则 $f(x) > f(x+1/n_0)$

及 $f(x) < f(x+1/n_0)$ ，$\forall x \in [0,1]$ 两式只能成立一个。若不然，$\exists x_1 \neq x_2$ 使 $f(x_1) > f(x_1+1/n_0)$ 及 $f(x_2) < f(x_2+1/n_0)$ 成立，则由零点定理知 $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$，使 $f(x_0) = f(x_0+1/n_0)$ ，这与假设矛盾。故而两式只能存在一个。无妨取

$$f(x) > f(x+1/n_0)\text{，}\quad \forall x \in [0,1] \tag{4-1}$$

把 [0,1] 区间 n_0 等分，小区间左端点分别为 $x_k = k/n_0$ ，$k = 0,1,2,\cdots,n_0-1$，依次代入式（4-1）得

$f(0) > f(1/n_0)$，$f(1/n_0) > f(2/n_0)$，…，$f[(n_0-1)/n_0] > f(1)$

从而 $f(0) > f(1)$，这与条件 $f(0) = f(1)$ 矛盾。故命题成立。

例 2 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的严格单调增函数，且对于 $\{x_n\} \subset [a,b]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 。

分析 因为不清楚 $f(x)$ 的连续性，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ ；同时，对数列 $\{x_n\}$ 的性态也不清楚。考虑用反证法。

证明 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$ ，则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N_1, \exists n_1 > N_1$，有 $|x_{n_1} - a| \geqslant \varepsilon_0$，由于 $\{x_n\} \subset [a,b]$，从而 $x_{n_1} \geqslant a+\varepsilon_0$ ，取 $N_2(> n_1)$，$\exists n_2 > N_2$，有 $x_{n_2} \geqslant a+\varepsilon_0$，…

取 $N_k(> n_{k-1})$，$\exists n_k > N_k$，有 $x_{n_k} \geqslant a+\varepsilon_0$，…，得到 $\{x_{n_k}\}$，其中每一项均不小于 $a+\varepsilon_0$，所以 $f(x_{n_k}) \geqslant f(a+\varepsilon_0)$

两边取极限得 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geqslant f(a+\varepsilon_0)$

但是另一方面，$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$，故有

$f(a) \geqslant f(a+\varepsilon_0)$，这与 $f(x)$ 为严格单调增函数矛盾。

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ，证完

评注（1）$\{f(x_{n_k})\}$ 为 $\{f(x_n)\}$ 的子数列，依据"数列收敛的充要条件为其任意子数列均收敛于相同极限"知 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ 。

（2）若 $a+\varepsilon_0 > b$（这是有可能的），显然 $f(a+\varepsilon_0)$ 无意义；但

必存在m，使$a+\varepsilon_0/m<b$，在原题中以$a+\varepsilon_0/m$取代$a+\varepsilon_0$，不影响最后的结果。

例 3 设$\{a_n\}$为一正数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n})^n$存在，证明$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n})^n\geqslant e$。

分析 观察$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n})^n$的结构，我们考虑利用$e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$。

证明 原题等价于证明$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n})^n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$或

$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}]^n\geqslant 1$。假设命题不成立，则有

$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}]^n<1$，因此存在$N$，当$n>N$时，有

$[\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}]^n<1$，进而$\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}<1$或者

$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}<-\frac{a_1}{n}$ 只要$n>N$时此式均成立，即

$\frac{a_{N+2}}{N+2}-\frac{a_{N+1}}{N+1}<-\frac{a_1}{N+2}$，$\frac{a_{N+3}}{N+3}-\frac{a_{N+2}}{N+2}<-\frac{a_1}{N+3}$，…，

$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}<-\frac{a_1}{n-1}$

上述式子相加得$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{N+1}}{N+1}<-a_1(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+\cdots+\frac{1}{n-1})$

两边令$n\to\infty$，易知

$-a_1(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+\cdots+\frac{1}{n-1})\to-\infty$

故$\frac{a_n}{n}\to-\infty$，这与$a_n>0$矛盾。故命题成立。

例 4 设$f(x)$是以T为周期的函数，且存在连续导函数$f'(x)$，证明$f'(x)$也是以T为周期的函数（浙江大学数学竞赛题，1982）。

证明 因为$f(x)=f(x+T)$，两边求导得$f'(x)=f'(x+T)$
所以$f'(x)$为周期函数，且T为$f'(x)$的一个周期。

下证T即为$f'(x)$的最小正周期。若不然，设$f'(x)$的最小正周期为T_1，则有$T=nT_1$（$n\geqslant 2$）。

在$f'(x)$的定义域内任取x,x_0，有$\int_{x_0}^{x}f'(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}f'(t+T_1)\mathrm{d}t$
因此$f(x)-f(x_0)=f(x+T_1)-f(x_0+T_1)$ 即

$$f(x)-f(x+T_1)=f(x_0)-f(x_0+T_1)\triangleq c \tag{4-2}$$

由x_0的任意性及T_1不为$f(x)$的周期知$c\neq 0$
分别以$x+T_1$，$x+2T_1$，….，$x+(n-1)T_1$替换式（4-2）中的x，得

$$f(x+T_1)-f(x+2T_1)=c$$
$$f(x+2T_1)-f(x+3T_1)=c$$
$$\vdots$$
$$f(x+(n-1)T_1)-f(x+nT_1)=c$$

这n个式子相加得$f(x)-f(x+nT_1)=nc$，但是$nT_1=T$，故有$f(x)-f(x+T)=nc$。另一方面，由于T为$f(x)$的周期，故有$f(x)-f(x+T)=0$，产生矛盾。因此T为$f'(x)$的最小正周期。

另证 （反证）设$f'(x)$的周期为T_1（$<T$），则

$$f'(x)=f'(x+T_1)$$

两边积分并整理得

$$f(x+T_1)-f(x)=f(x_0+T_1)-f(x_0)\triangleq c \tag{4-3}$$

由前面的证明过程知$c\neq 0$。由于$f(x)$为连续的周期函数，故能取到最大值M和最小值m。

（1）若$c>0$，取x^*，使$f(x^*)=M$，则依式(4-3)得
$f(x^*+T_1)=M+c>M$，这与M是最大值相矛盾。

（2）若$c<0$，取x^*_1，使$f(x_1^*)=m$，则依式(4-3)得
$f(x_1^*+T_1)=m+c<m$，这与m是最小值相矛盾。

评注 周期函数并不一定具有最小正周期，例如常数函数等。

例 5 设$f(x),g(x)$均为连续的具有最小正周期的函数，且

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$　证明 $f(x)\equiv g(x)$

分析　因为周期函数无穷远处的性态与近处的性态相同　结合 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$　猜测两函数相等　在证明时可先从周期入手

证明　设 $g(x)$ 的周期为 p　即 $g(x)=g(x+p)$　则

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x+p)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)+g(x+p)-f(x+p)]$$
$$=\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]+\lim_{x\to\infty}[g(x+p)-f(x+p)]=0$$

（1）假设 $f(x)$ 的周期为 q　且 $q\neq p$　则至少 $\exists x_0$　使

$f(x_0)-f(x_0+p)=\alpha\neq 0$　所以

$$\lim_{N\to\infty}[f(x_0+Nq)-f(x_0+Nq+p)]=\lim_{N\to\infty}[f(x_0)-f(x_0+p)]=\alpha$$

但另一方面

$$\lim_{N\to\infty}[f(x_0+Nq)-f(x_0+Nq+p)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x+p)]=0\quad 矛盾$$

因此 $q=p$　即 $f(x)$ $g(x)$ 有相同的周期

（2）假设 $f(x)\neq g(x)$　则至少存在 x_0^*　使

$f(x_0^*)-g(x_0^*)=\beta\neq 0$

故 $\lim\limits_{N\to\infty}[f(x_0^*+Np)-g(x_0+Np)]=\lim\limits_{N\to\infty}[f(x_0^*)-g(x_0)]=\beta$

但另一方面

$$\lim_{N\to\infty}[f(x_0+Np)-g(x_0+Np)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0\quad 矛盾$$

综合（1）（2）得 $f(x)\equiv g(x)$　证完

例 6　设函数 $f(x)$ 在 $[a\ b]$ 上有定义　$\forall x_0\in[a\ b]$　若对任一收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}\subset[a\ b]$　均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$　证明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

证明　假设 $f(x)$ 在 x_0 处不连续　则有

$\exists\varepsilon_0>0$　$\forall\delta_1>0$　$\exists x_1\in U^\circ(x_0\ \delta_1)$　使 $|f(x_1)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0$

取 $\delta_2=|x_0-x\ |/2$　$\exists x_2\in U\ (x_0\ \delta_2)$　使 $|f(x_2)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0$

取 $\delta\ =|x_0-x\ |/2^2$　$\exists x\ \in U\ (x_0\ \delta\ )$　使 $|f(x\ )-f(x_0)|\geq\varepsilon_0$

取 $\delta_n = |x_0 - x_{n-1}|/2$ ，$\exists x_n \in U(x_0, \delta_n)$，$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ 。

依次下去得到数列 $\{x_n\}$ ，且此数列满足

$|x_n - x_0| \leq \delta_n \leq |x_0 - x_1|/2^{n-1}$ ，易知 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

但显然有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ ，与条件矛盾，故 $f(x)$ 在 x_0 点处连续，且由 x_0 的任意性知 $f(x) \in C[a, b]$

例 7 设 $f(x)$ 为非负函数，它在 $[a, b]$ 内任一小区间内不恒为零，在 $[a, b]$ 内二次可导，且 $f''(x) \geq 0$ ，证明方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内如果有根，则根惟一。

证明 设 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内有根但根不惟一，设至少有两根 $x_1, x_2 \in (a, b)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，由 Rolle 中值定理，$\exists c \in (x_1, x_2)$ ，使 $f'(c) = 0$ ，由 $f''(x) \geq 0$ 知道 $f'(x)$ 为单调增函数，因此

当 $x \in [a, c]$ 时，$f'(x) \leq 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上单调下降，又 $f(x_1) = 0$ ，$x_1 \in (a, c)$ ，所以 $f(x) \leq 0$ ，$x \in [x_1, c]$

又因为 $f(x)$ 在任一小区间内不恒为零，故 $\exists x_0 \in (x_1, c)$ ，使 $f(x_0) < 0$ ，这与条件 $f(x)$ 非负矛盾，故原命题正确。

另证 设 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内有根但根不惟一，设至少有两根 $x_1, x_2 \in (a, b)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，由洛尔中值定理，$\exists c \in (x_1, x_2)$ ，使 $f'(c) = 0$ ，由题设知 $f(x)$ 在 (c, x_2) 中不恒为零，故存在 $x_0 \in (c, x_2)$ ，使 $f(x_0) > 0$ ，在 $[x_0, x_2]$ 上运用拉格朗日中值定理

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{-f(x_0)}{x_2 - x_0} < 0$$

其中 $\xi \in (x_0, x_2) \subset (c, x_2)$ ，从而 $c < \xi$ 且 $f'(c) > f'(\xi)$ ，但由 $f''(x) \geq 0$ 知 $f'(x)$ 单调上升，得到 $f'(c) \leq f'(\xi)$ ，产生矛盾，故原命题正确

例 8 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & k=0, 1, 2, \cdots, n-1 \\ c \neq 0 & k=n \end{cases}$ ，则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 x_0 使 $|f(x_0)| \geq \dfrac{2^n (n+1)c}{(b-a)^{n+1}}$

分析 $\dfrac{2^n(n+1)c}{(b-a)^{n+1}}=\dfrac{(n+1)c}{2(\frac{b-a}{2})^{n+1}}$，这启发我们考虑积分 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^n\mathrm{d}x$，由于条件中 x^k 与 $f(x)$ 是相乘的关系，进一步想到 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^n f(x)\mathrm{d}x$。

证明 设不存在这样的 x_0，即 $\forall x\in[a,b]$，恒有

$$|f(x)|<\frac{2^n(n+1)c}{(b-a)^{n+1}}$$

但是我们有

$$c=\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^n f(x)\mathrm{d}x<\frac{2^n(n+1)c}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^n\mathrm{d}x=c$$

这是不可能的。故原命题正确。

评注 （1）特别地，$a=0,b=c=n=1$ 时，得到如下常见题目，$f(x)\in C[0,1]$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$，证明至少存在一点 $x_0\in[0,1]$，使 $|f(x_0)|\geqslant 4$。

（2）更进一步，存在区间 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$，$\forall x\in[x_1,x_2]$，有 $|f(x)|\geqslant\dfrac{2^n(n+1)c}{(b-a)^{n+1}}$。

简证 假设不存在这样的区间，则由连续函数的保号性知，不存在使不等式 $|f(x)|>\dfrac{2^n(n+1)c}{(b-a)^{n+1}}$ 成立的点，即 $\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant\dfrac{2^n(n+1)c}{(b-a)^{n+1}}$，且使等号成立的点不构成区间（否则证完），故在这些点上积分和为零。故仅就积分而言，只考虑使 $|f(x)|<\dfrac{2^n(n+1)c}{(b-a)^{n+1}}$ 成立的点即可，但本题证明过程已表明该不等式会导致矛盾。

例 9 设 $f(x),g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$，又知 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个零点 x_1,x_2。证明 $\exists x_0\in(a,b)$，使 $g(x_0)=0$

证明 假设不存在这样的点 x_0，即 $\forall x\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，有 $g(x)\neq 0$，故可构造辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in[x_1,x_2]$

因为 $F(x_1)=F(x_2)=0$，所以由洛尔中值定理得 $\exists c\in(x_1,x_2)$，使 $F'(c)=0$，即 $\dfrac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g^2(c)}=0$ 这与条件 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$ 矛盾。所以 $\exists x_0\in(a,b)$，使 $g(x_0)=0$。

例 10 设函数 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(x)\geqslant 0$，若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$。

分析 函数的连续性是一个局部概念，即若函数在某一点处大于零，那么函数就在该点的某个邻域内其值均大于零。

证明 假设 $f(x)$ 不恒为零，即 $\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=c>0$

（1）当 $x_0\in(a,b)$ 时，$f(x)\in C[a,b]$，故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=c$

取 $\varepsilon=\dfrac{c}{2}$，则存在 $\delta>0$，使当 $x\in U(x_0,\delta)\subset[a,b]$ 时，有

$$|f(x)-c|<\varepsilon=\frac{c}{2}\Rightarrow f(x)>\frac{c}{2}$$

所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{c}{2}\mathrm{d}x=c\delta>0$ 但这与条件 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故 $f(x)\equiv 0$。

（2）当 $x_0=a,b$ 端点时，我们用半邻域的概念仿（1）也可证明 $f(x)\equiv 0$。故原命题正确。

例 11 若 $f(x)$ 为周期函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则 $f(x)\equiv 0$

证明 假设结论不成立，即 $\exists x_0$，使 $f(x_0)=c\neq 0$，无妨设 $c>0$，令 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(x_0+nT)=f(x_0)=c$，$\forall n\in N$，这表明当 $x\to\infty$ $(n\to\infty)$ 时，至少每隔 T 距离 $f(x)$ 就有一点处的值为 c。

取 $\varepsilon_0=\frac{c}{2}$， $\forall X>0$，取 $n=[\frac{X}{T}]+1$，则有

$x^*=nT+x_0\geqslant X+x_0>X$，使得

$$\left|f(x^*)-0\right|=\left|f(nT+x_0)\right|=\left|f(x_0)\right|=c>\frac{c}{2}=\varepsilon_0$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq 0$，与条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 矛盾。故 $f(x)\equiv 0$。

例 12 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，其值域为 $[f(a),f(b)]$，则 $f(x)\in C[a,b]$。

分析 从几何直观上来看，结论是显然的。因为假如有间断点，则 $f(x)$ 的值域势必大于 $[f(a),f(b)]$；我们可以利用单调性从单侧逼近的方法加以处理。

证明 $\forall x_0\in(a,b)$，构造数列 $\{x_n\mid x_n=x_0+\frac{1}{n}\}$，则 $\{x_n\}\downarrow$ 且 $\to x_0$，从而 $\{f(x_n)\}\downarrow$ 且 $f(x_n)\geqslant f(x_0)$，依据“数列单调有界必有极限”得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\inf\{f(x_n)\}\triangleq A$，其中 $\inf\{f(x_n)\}$ 表示 $\{f(x_n)\}$ 的下确界，即最大的下界。

下面证明 $A=f(x_0)$，若不然，有 $A>f(x_0)$，则对 $\varepsilon_1=A-f(x_0)$，$\exists n_1$ 使 $f(x_{n_1})<A-\varepsilon_1=f(x_0)$

另一方面 $x_{n_1}>x_0$，$f(x)\uparrow$，故有 $f(x_{n_1})\geqslant f(x_0)$，从而产生矛盾。故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$。

同样地，取 $\{y_n\mid y_n=x_0-\frac{1}{n}\}$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=f(x_0)$

因此 $\forall\varepsilon>0,\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|f(x_n)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \left|f(y_n)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对上述 $N,\exists\delta$，使 $U(x_0,\delta)\subset(y_N,x_N)=(x_0-\frac{1}{N},x_0+\frac{1}{N})$

$\forall x\in U(x_0,\delta)$，$\exists n(>N)$ 使 $x\in(y_n,x_n)$，此时有

$\left|f(x)-f(x_0)\right|\leqslant\max\{\left|f(x_n)-f(x_0)\right|,\left|f(y_n)-f(x_0)\right|\}$

$\leqslant\left|f(x_n)-f(x_0)\right|+\left|f(y_n)-f(x_0)\right|\leqslant\varepsilon$

故 $f(x)$ 在 x_0 点处连续，易证 $f(x)$ 在 $x=a,x=b$ 处单侧连续。由 x_0 的任意性知 $f(x)\in C[a,b]$。

例 13 设 $f(x)\in C[a,b]$，若 $\{x_n\}\subset[a,b]$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则必存在 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=A$。

证明 1 假设不存在这样的 x_0，因此有 $f(x)>A$ 及 $f(x)<A$，$\forall x\in[a,b]$。由零点定理知二者只能取一个。无妨设 $f(x)>A$，$\forall x\in[a,b]$。因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 能取到最小值 m，显然 $m>A$。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，$\{x_n\}\subset[a,b]$

所以对 $\varepsilon_0=m-A$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$|f(x_n)-A|<\varepsilon_0$，即 $f(x_n)<A+\varepsilon_0=A+m-A=m$，且 $x_n\in[a,b]$

这与 m 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值矛盾。故命题成立。

证明 2 因为 $\{x_n\}\subset[a,b]$，所以 $\exists\{x_n\}$ 的一个收敛子数列，记为 $\{x_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$，结合 $f(x)$ 为连续函数，得

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\lim_{k\to\infty}x_{n_k})=f(x_0)$$

另一方面 $\{f(x_{n_k})\}$ 为 $\{f(x_n)\}$ 的子列，故有

$$f(\lim_{k\to\infty}x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=A$$

所以 $\exists x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=A$。证完

例 14 设 $f(x),g(x)$ 为有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且有数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，使 $g(x_n)=f(x_{n+1})$　$n=1,2,\cdots$ 证明至少存在一点 $x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)=g(x_0)$。

分析 本题与例 13 有许多相似之处，也可直接证明或反证。可以依照 $g(x_n)=f(x_{n+1})$ 大致画出 $g(x_n),f(x_n)$ 的关系图像（见图 4-1）。画图时尽量避免 $g(x_n),f(x_n)$ 相交，使之具有一般性。观察图象猜测 $\{f(x_n)\},\{g(x_n)\}$ 均单调上升，这与它们初值的大小有关。

证明 1 先讨论 $f(x_1),g(x_1)$ 的大小关系。若相等，则本题证完；故可取 $f(x_1)<g(x_1)$，若 $\exists x_{n_0}$，使 $f(x_{n_0})>g(x_{n_0})$，则由连续函数的零点定理知在 x_1 与 x_{n_0} 之间存在 x_0，使 $f(x_0)=g(x_0)$，则证完。不

妨设不存在这样的 x_{n_0}，即 $\forall n$，有 $f(x_n)<g(x_n)$，与 $g(x_n)=f(x_{n+1})$ 联立，得 $f(x_n)<f(x_{n+1})$ 即 $\{f(x_{n+1})\}\uparrow$，有界

故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=A$　　（4-4）

因为 $\{x_n\}\subset[a,b]$　所以存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，记 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$

结合式（4-4）有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\lim_{k\to\infty}x_{n_k})=f(x_0)$$
$$=\lim_{k\to\infty}g(x_{n_k})=g(\lim_{k\to\infty}x_{n_k})=g(x_0)$$

即 $f(x_0)=g(x_0)$　证完。

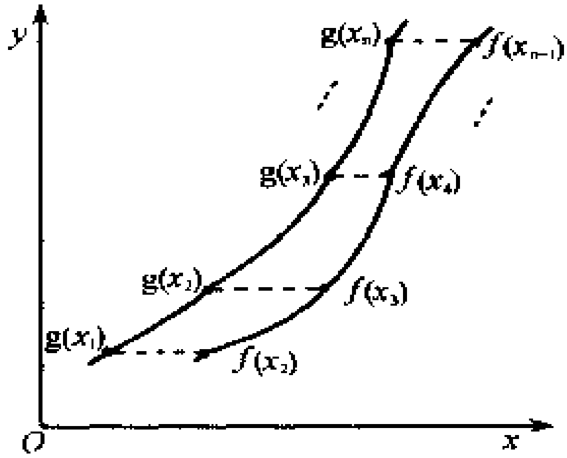


图 4-1

证明 2　（反证法）假设不存在这样的点，依连续函数的零点定理，$f(x)-g(x)>0$ 及 $f(x)-g(x)<0$ 二者仅成立其一。无妨取 $f(x)-g(x)>0$，$\forall x\in[a,b]$。$f(x)-g(x)$ 作为 $[a,b]$ 上的连续函数，存在最小值 δ，当 $\delta=0$ 时，则证完。故设 $\delta>0$，所以 $f(x)-g(x)\geqslant\delta$　$(\delta>0)$　$\forall x\in[a,b]$。由条件得

$f(x_{n+1})=g(x_n)$，$f(x_n)=g(x_{n-1})$，…，$f(x_2)=g(x_1)$

把上述式子相加并整理得

$$f(x_{n+1})-g(x_1)=-\sum_{k=2}^{n}[f(x_k)-g(x_k)]$$

所以 $|f(x_{n+1})-g(x_1)|=\sum\limits_{k=1}^{n}[f(x_k)-g(x_k)]\geqslant(n-1)\delta$

因此当 $n\to\infty$ 时，有 $f(x_{n+1})\to\infty$，这与 $f(x)\in C[a,b]$ 矛盾。故 $\delta=0$，即存在使 $f(x)=g(x)$ 成立的点。证完

例 15　计算积分 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$

分析　本题直接积分是困难的，我们考虑差值 (x^b-x^a) 可以用积分或微分中值公式去表达，以寻求解决途径。本题显然不宜用微分中值公式，因为中值点 ξ 不能被积分，只能被粗略估值。

解 因为 $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y \mathrm{d}y$，所以

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1\int_a^b x^y \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b\left(\int_0^1 x^y \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = \ln\frac{b+1}{a+1}$$

评注 在解决大部分问题时，我们的习惯思维是把问题 $\int_a^b x^y \mathrm{d}y$ 化为结果 $(x^b - x^a)/\ln x$，而不习惯把结果化为问题，这方面的能力应加强。这是因为，数学中形式的相互等价变换是广泛存在的，也是非常重要的。

例 16 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 2, x_2 = 2 + 1/x_1, \cdots, x_{n+1} = 2 + 1/x_n$，… 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

分析 该数列不单调，直接求极限有一定难度。猜想若极限值已经求出，记为 x_0，则 x_0 应满足哪些条件和规律？通过这些规律进一步了解数列 $\{x_n\}$ 的性态。易见，x_0 满足 $x_0 = 2 + 1/x_0$。

解 运用数学归纳法可证明 $x_n > 2$，取 $x_0 = 1 + \sqrt{2}$，则 x_0 满足 $x_0 = 2 + 1/x_0$，则

$$|x_n - x_0| = \left|2 + \frac{1}{x_{n-1}} - 2 - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{1}{x_0 x_{n-1}}|x_{n-1} - x_0| \leqslant \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_0|$$

$$\leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|$$

即 $0 < |x_n - x_0| \le \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|$，令 $n \to \infty$，得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = 1 + \sqrt{2}$$

另解 令 $f(x) = 2 + 1/x$，则 $x_{n+1} = f(x_n)$，$f'(x) = -1/x^2$，因此 $f(x)$ 单调下降。易知 $x_1 < x_3$，则 $f(x_1) > f(x_3)$ 即 $x_2 > x_4$，进而 $f(x_2) < f(x_4)$，即 $x_3 < x_5$，结合数学归纳法可得 $\{x_{2k-1}\}$ 单调上升；$\{x_{2k}\}$ 单调下降。又可以运用数学归纳法证明 $2 \leqslant x_n \leqslant 3$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = b$。

在 $x_{n+1}=2+1/x_n$ 两边取极限得 $a=2+1/b$，$b=2+1/a$，解得 $a=b=1+\sqrt{2}$ （略去负根 $1-\sqrt{2}$ ） 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$

例 17 计算由 $y=x^2$ 与直线 $y=mx\ (m>0)$ 在第一象限内所围成的图形绕该直线旋转所成的体积（见图 4-2）（北京市大学生数学竞赛题 1990）

分析 显然应用微元法，关键是如何寻找一般位置上的体积微元，正常考虑方式是作直线 $y=mx$ 的垂线（因为已经知道了直线的斜率 m，故垂线的斜率即知为 $-1/m$ ）交抛物线于一点，运用两点间距离公式求出体积微元的底圆半径，这样做在实际中是很复杂的，或者利用坐标旋转公式把图形转到水平位置上，再进行处理，仍很复杂，当年的试题解答就是用这些方法。既然可以从直线出发建立与抛物线的关系，当然完全可以从抛物线出发建立与直线的关系。这样试一下是否简单呢？

解 在抛物线上取动点 $P(x,x^2)$，则 P 到直线 $y=mx$ 的距离即为底圆半径 r，依据点到直线距离公式，有

$r=\left|mx-x^2\right|/\sqrt{m^2+1}$

而体积微元的高 dh 与 dx 有这样的关系 $dh=\sqrt{m^2+1}dx$

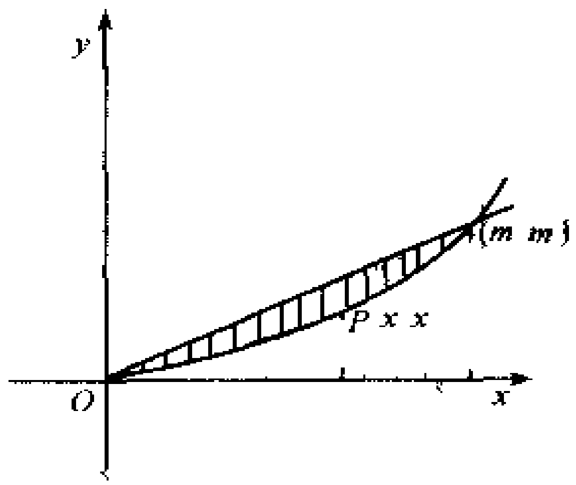


图 4-2

所以 $dV=\pi r^2dh=\dfrac{\pi(mx-x^2)^2}{\sqrt{m^2+1}}dx$

所以 $V=\int dV=\int_0^m\dfrac{\pi(mx-x^2)^2}{\sqrt{m^2+1}}dx=\dfrac{m^5\pi}{30\sqrt{m^2+1}}$

另解 可利用古鲁金第二定理：面积为 S 的平面图形绕与其共面但不相交（可相切）的轴线 l 旋转所得的旋转体的体积 $V=2\pi Sh$，其中 h 为平面图形的形心到轴线 l 的距离

设图形的形心为 $C(\bar{x},\bar{y})$，则

$$\bar{x}=\frac{\int_0^m x(mx-x^2)\mathrm{d}x}{\int_0^m (mx-x^2)\mathrm{d}x}=\frac{m}{2}\qquad \bar{y}=\frac{\int_0^{m^2} y(\sqrt{y}-\frac{y}{m})\mathrm{d}y}{\int_0^{m^2}(\sqrt{y}-\frac{y}{m})\mathrm{d}y}=\frac{2m^2}{5}$$

因此形心 $C(\bar{x},\bar{y})$ 到直线 $y=mx$ 的距离为 $h=\dfrac{|m\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{m^2+1}}$

而图形的面积为 $S=\int_0^m (mx-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{m}{6}$，依据古鲁金第二定理，得

$$旋转体体积为 V=2\pi Sh=2\pi\frac{m}{6}\frac{\left|\frac{m^2}{2}-\frac{2m^2}{5}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{m\pi}{30\sqrt{m^2+1}}$$

例18 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，$n>2$，则 $\dfrac{1}{2(n+1)}<I_n<\dfrac{1}{2(n-1)}$

分析 经验告诉我们，或者 I_n 可以被求出或者满足某种递推关系式。

证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\tan^2 x\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x(\sec^2-1)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$$

从而 $I_n+I_{n-2}=\dfrac{1}{n-1}$

下面用反证法证明 $I_n>\dfrac{1}{2(n+1)}$，否则 $I_n\leqslant\dfrac{1}{2(n+1)}$，而且

$I_{n-2}\leqslant\dfrac{1}{2(n-1)}$，所以

$$I_n+I_{n-2}\leqslant\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n-1)}=\frac{n}{(n+1)(n-1)}$$

但是 $I_n+I_{n-2}=\dfrac{1}{n-1}>\dfrac{n}{(n+1)(n-1)}$，这样就得到矛盾。故 $I_n>\dfrac{1}{2(n+1)}$，类似可以证明 $I_n<\dfrac{1}{2(n-1)}$

因此有结论：$\dfrac{1}{2(n+1)}<I_n<\dfrac{1}{2(n-1)}$

例 19 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f[f(x)]=x$，证明在 $(-\infty,+\infty)$ 上至少有一个 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$。

证明 （反证法）假设结论不成立，则
$f(x)>x$ 及 $f(x)<x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅能有一个成立。若不然即可由零点定理导出矛盾。
无妨设 $f(x)>x \quad \forall x\in R$ (4-5)
式(4-5)表明函数值恒大于相应自变量，故而当 $f(x)$ 作为自变量时也应有 $f[f(x)]>f(x)$，结合条件 $f[f(x)]=x$，得
$x>f(x)$，这与式(4-5)矛盾。故命题成立。

4.3 自测题及提示

4.3.1 自测题

1．设 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}$，则不存在以 $f(x)$ 为导数的函数。

2．求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan\pi x-\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 的值。

3．设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$，求证存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$。

4．在区间 $[0,2]$ 上能否存在满足下列条件的函数 $f(x)$，在该区间上连续可微：$f(0)=f(2)=1$；$|f'(x)|\leqslant 1$；$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 1$？

5．若 $f(x)\in C[a,b]$ 且对任何 $x\in[a,b]$，存在相应的 $y\in[a,b]$，使 $|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$，则至少存在一点 x_0，使 $f(x_0)=0$

6．设对任意实数x,y，有$\frac{f(x)+f(y)}{2} \leqslant f(\frac{x+y}{2})$且$f(x) \geqslant 0$，$f(0)=c$证明$f(x) \equiv c$。

7．设函数$f(x)$在$[0,\ 1]$上可导，$0<f(x)<1$，且$f'(x) \neq 1$ $(0<x<1)$证明在$(0,1)$内必有惟一的点x_0，使$f(x_0)=x_0$

8．设n为偶数，且$a \neq 0$，证明方程$x^n+a^n=(x+a)^n$仅当$x=0$时成立。

9．设函数$f(x)$在整个实数轴上有界，且有连续的二阶导函数。证明：$\exists x_0$使$f''(x_0)=0$

10．证明曲线$y=\mathrm{e}^x$与$y=ax^2+bx+c$的交点不多于三个。

11．若$f(x) \in C[0,1]$，且$\forall x \in [0,1]$有$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u \geqslant f(x) \geqslant 0$，则$f(x) \equiv 0$。

4.3.2 自测题提示

1．假设$F(x)$的导数为$f(x)$，则$F'(0)=f(0)=1$，但另一方面$F'(0)=\lim\limits_{x \to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x \to 0}\frac{F'(\xi)x}{x}=\lim\limits_{\xi \to 0} f(\xi)=\lim\limits_{\xi \to 0}|\xi|=0$，（其中$\xi$介于0和$x$之间），从而产生矛盾。

2．$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan \pi x-\arctan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\int_1^{\pi}\frac{1}{1+(xy)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

$=\int_1^{\pi}(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(xy)^2}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y=\int_1^{\pi}\frac{\pi}{2y}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\ln\pi$

3．因为$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$，且$\sin x \geqslant 0$，$x \in [0,\pi]$，所以$f(x)$在$[0,\pi]$上至少有一个零点$x_1$，只要还能找出另一个零点$x_2$，则运用罗尔中值公式即可解决本题。

（反证）假设只有一个零点x_1，使得$f(x_1)=0$，则 $f(x)\sin(x-x_1)$在$[0,\pi]$上除x_1点外恒为正值或恒为负值，且依洛尔中值公式知二者仅取其一。无妨设$f(x)\sin(x-x_1)>0$，则

$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-x_1)\mathrm{d}x>0$，但另一方面

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x-x_1)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\cos x_1\mathrm{d}x$$

$$-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\sin x_1\mathrm{d}x$$

$$=\cos x_1\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x-\sin x_1\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$$

从而产生矛盾，故 $f(x)$ 至少还有另外一个零点 x_2，即 $f(x_1)=f(x_2)=0$。由洛尔中值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,\pi)$，（无妨设 $x_1<x_2$）使 $f'(\xi)=0$

4．假设这样的函数存在，则运用拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+f'(\xi)x \qquad (1)$$

$$f(x)=f(2)+f'(\zeta)(x-2) \qquad (2)$$

利用 $f(0)=f(2)=1$；$|f'(x)|\leqslant 1$，式（1），式（2）两式变为

$$1-x\leqslant f(x)\leqslant 1+x，\quad x-1\leqslant f(x)\leqslant 3-x$$

把这两个不等式分别在 $[0,1],[1,2]$ 上积分得

$$\frac{1}{2}=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}=\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2(3-x)\mathrm{d}x=3-\frac{3}{2}$$

所以 $1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3$，这表明函数 $f(x)$ 的图像不能有低于图 4-3 中折线 ACB 的部分；而题目中要求 $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 1$，这表明函数 $f(x)$ 的图像不能有高于折线 ACB 的部分。因此 $f(x)$ 的图像只能是折线 ACB。但函数 $f(x)$ 在 $C(1,0)$ 点处不可微，得出矛盾。

5．假设 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\neq 0$，则 $f(0)>0$ 及 $f(0)<0$ 仅取其一。无妨设 $f(0)>0$，$\forall x\in\{a,b\}$。由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知道 $f(x)$ 有最小值，记 $f(y_0)=\min f(x)>0$，由条件知 $\exists\eta\in[a,b]$ 使得 $f(\eta)=|f(\eta)|\leqslant$

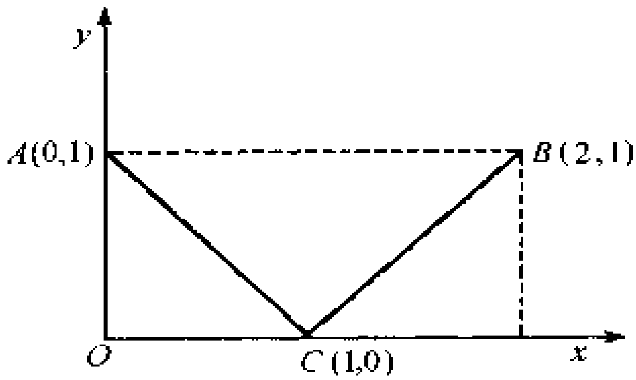


图 4-3

$\frac{1}{2}|f(y_0)| < f(y_0)$，这与 $f(y_0)=\min f(x)$ 矛盾。

6．先证 $f(x)\geqslant c$。假设存在 a 使 $f(a)<c=f(0)$，取 $h=f(0)-f(a)>0$，在 $\frac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f(\frac{x+y}{2})$ 中令 $x=0, y=2a$，得 $f(0)+f(2a)\leqslant 2f(a)$，即

$f(2a)\leqslant 2f(a)-f(0)=f(0)-2h$，假设 $f(2^n a)\leqslant f(0)-2^n h$ 成立，则在 $\frac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f(\frac{x+y}{2})$ 中令 $x=0$，$y=2^{n+1}a$ 并利用上述假设得

$$
\begin{aligned}
f(2^{n+1}a) &\leqslant 2f(2^n a)-f(0)\leqslant 2[f(0)-2^n h]-f(0)\\
&\leqslant f(0)-2^{n+1}h
\end{aligned}
$$

这就证明了对任意的自然数 n，有 $f(2^n a)\leqslant f(0)-2^n h$ 成立。在 $f(2^n a)\leqslant f(0)-2^n h$ 中取充分大的 n 使 $f(0)-2^n h<<0$，则 $f(2^n a)<0$ 这与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾。故 $f(x)\geqslant c$。

再证 $f(x)\equiv c$。在 $\frac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f(\frac{x+y}{2})$ 中令 $y=-x$，得 $2f(0)=2c\geqslant f(x)+f(-x)$

由于 $\forall y$，有 $f(y)\geqslant c$，故 $f(-x)\geqslant c$，因此 $2c\geqslant f(x)+f(-x)\geqslant 2c$，所以 $f(x)+f(-x)=2c$ 即 $f(x)\equiv c$。

7．（1）令 $g(x)=f(x)-x$，由连续函数的零点定理知存在。

（2）惟一性的证明可用反证法结合拉格朗日中值定理即可。

8．n 是偶数必不可少，否则 $x=-a$ 就是另一根，假设有 $x_0\neq 0$ 使方程 $x^n+a^n=(x+a)^n$ 成立。无妨设 $x_0>0$，令 $f(x)=x^n+a^n-(x+a)^n$，$x\in[0,x_0]$。因为 $f(x)$ 为 $n-1$ 次多项式，故可导，又因为 $f(0)=f(x_0)=0$，由洛尔中值定理知 $\exists\xi\in(0,x_0)$ 使 $f'(\xi)=n\xi^{n-1}-n(\xi+a)^{n-1}=0$ 结合 n 为偶数得 $\xi=\xi+a$，即 $a=0$，与条件 $a\neq 0$ 矛盾。

9．假设任给 x 有 $f''(x)\neq 0$，则依据连续函数零点定理知 $f''(x)>0$ 及 $f''(x)<0$ 仅存在其一。无妨取 $f''(x)>0$，这样 $f(x)$ 是凸

函数，从而 $g(x)=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$ 位于 $f(x)$ 的下方，但线性函数 $g(x)$ 是无界的，因此 $f(x)$ 也无界。与条件 $f(x)$ 有界矛盾。

10. 假设曲线 $y=e^x$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 有四个交点，即 $f(x)=e^x-ax^2-bx-c$ 有四个不同的零点。则依据洛尔定理 $f'(x)=e^x-2ax-b$ 有三个不同的零点；$f''(x)=e^x-2a$ 有两个不同的零点；$f'''(x)=e^x$ 有一个零点。但函数 $y=e^x$ 没有零点。

11. 假设 $\exists x_0\in(0,1)$ 使 $f(x_0)=c>0$，则

$f(x_0)>x_0f(x_0)\geqslant\int_0^{x_0}f(u)\mathrm{d}u\leqslant f(x_0)$，所以有 $f(x_0)>f(x_0)$，矛盾！这表明 $\forall x\in(0,1)$ 有 $f(x)=0$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(0)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}0=0$ 同理可得 $f(1)=0$，总之有 $f(x)\equiv0$，$\forall x\in[0,1]$。

第 5 章　重积分

5.1　内容提要

本章主要讨论二重积分和三重积分及多重积分的相关问题。

在二重积分计算方面，应掌握直角坐标、极坐标的计算方法，注意对称性的合适应用，选择恰当的积分次序。当被积函数在积分区域的不同部分上具有不同的表达式，应将区域划为不同的部分，分别积分再相加。变量替换的原则是使被积函数简化，积分区域容易定限。

对于三重积分的计算，应熟练掌握柱坐标、球面坐标的计算方法，会将三重积分化为累次积分。

对于多重积分问题，可以考虑数学归纳法的运用，利用递推的思想，化为低维情形进行考查。

5.2　例题解析

例 1　证明 $\int_a^b dx\int_0^x f(y)dy = \int_a^b f(x)(b-x)dx$ 。

分析　等式左边是二重积分，右边是定积分。可以考虑将左边二重积分交换积分次序，使之对一个变量可积分，剩下一个定积分，再推出右式。

证明 1　由原式左边的二次积分上、下限写出积分区域 D 是 $\begin{cases} a \leqslant y \leqslant x \\ a \leqslant x \leqslant b \end{cases}$，如图 5-1 所示。

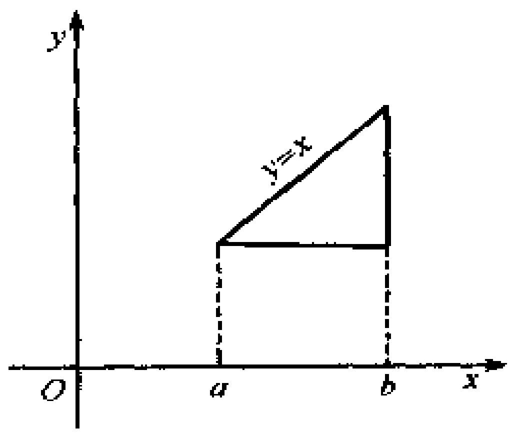


图 5-1

将原式左边改变积分次序得

$$\int_a^b dx\int_0^x f(y)dy = \int_a^b dy\int_y^b f(y)dx$$

$$=\int_a^b f(y)(b-y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)(b-x)\mathrm{d}x$$

证明 2 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b[F(x)-F(a)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x-F(a)(b-a)$$

$$=[xF(x)]\big|_a^b-\int_a^b xF'(x)dx-F(a)(b-a)$$

$$=b[F(b)-F(a)]-\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=b\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x-\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=b\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)(b-x)\mathrm{d}x$$

例 2 设 $f(t)$ 为连续函数，求证 $\iint\limits_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$，$D$ 为区域 $|x|\leqslant A/2$，$|y|\leqslant A/2$，$A>0$。

分析 欲证二重积分等于定积分的常用方法是将二重积分化成累次积分，使其中一个积分容易积出，从而变成定积分。

证法 1 $\iint\limits_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-A/2}^{A/2}\mathrm{d}x\int_{-A/2}^{A/2}f(x-y)\mathrm{d}y$

$$\underline{\underline{x-y=t}}\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{x+\frac{A}{2}}^{x-\frac{A}{2}}f(t)(-\mathrm{d}t)=\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x\int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-A}^{0}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\frac{A}{2}}^{t+\frac{A}{2}}\mathrm{d}x+\int_0^A f(t)\mathrm{d}t\int_{t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-A}^{0}f(t)(t+A)\mathrm{d}t+\int_0^A f(t)(A-t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-A}^{0}f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t+\int_0^A f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$$

作变换 $x-y=t$ 后的积分区域如图 5-2 所示

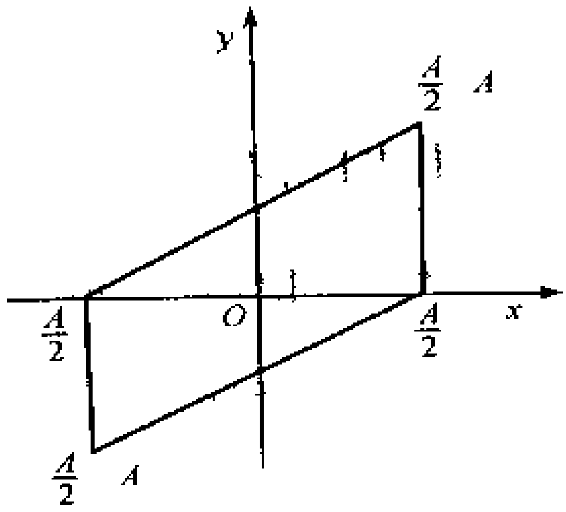


图 5 2

证法 2 作变换 令 $x-y=u$

$x+y=v$

则 $x=(u+v)/2$ $y=(v-u)/2$

$$J=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2\end{vmatrix}=1/2$$

区域 D · $|x|\leqslant\frac{A}{2}$ $|y|\leqslant\frac{A}{2}$ 变换为区域

D $-A\leqslant u+v\leqslant A$ $-A\leqslant v-u\leqslant A$

（见图 5-3）

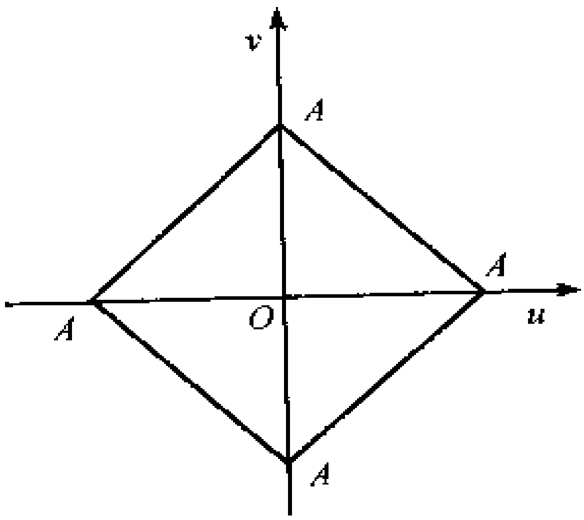


图 5-3

所以 $\iint\limits_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(u)\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=\frac{1}{2}\int_{-A}^{0}f(u)\mathrm{d}u\int_{-u-A}^{u+A}\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_{0}^{A}f(u)\mathrm{d}u\int_{u-A}^{A-u}\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-A}^{0}(A+u)f(u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{A}(A-u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-A}^{0}(A-|u|)f(u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{A}(A-|u|)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-A}^{A}f(u)(A-|u|)\mathrm{d}u=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$$

例 3 计算 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 D 是由 $y=x$ $y=1$ 和 $x=-1$ 所围成的区域 $f(x)$ 是 D 上的连续函数

分析 题设中没有给出 $f(x)$ 的具体形式 应充分利用奇函数、偶函数的积分性质

解 由图 5-4 知 原式 $=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}\mathrm{d}x\int_{x} x\mathrm{d}y+I=-\frac{2}{5}+I$$

其中 $I=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}yf(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}\frac{1}{2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2)$$

记 $F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+y^2)]_{x^3}^{1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]\mathrm{d}x=0$$

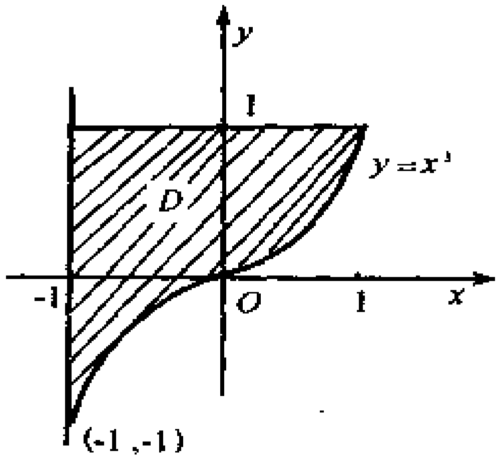


图 5-4

（因为 $x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]$ 是奇函数，奇函数在对称区间上的积分是零。）

所以 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{5}$

例 4 计算 $I=\int_1^2\mathrm{d}x\int_2^{1/x}ye^{xy}\mathrm{d}y$。

分析 若按原积分次序先对 y 积分后对 x 积分，被积函数将变得不容易积分，故可以考虑变换积分次序先对 x 积分。又因为由累次积分与变成重积分要写出积分域的表达式，而题设中积分的下限大，上限小不符合重积分定限原则，所以要利用定积分性质将积分上下限交换，再画出积分域的草图（见图 5-5）。

解 $I=-\int_1^2\mathrm{d}x\int_{1/x}^{2}ye^{xy}\mathrm{d}y$，交换积分次序得

$$I=-\iint\limits_D ye^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-(\int_{1/2}^{1}\mathrm{d}y\int_{1/y}^{2}ye^{xy}\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^2 ye^{xy}\mathrm{d}x)$$

$$=-\int_{1/2}^{1}(e^{2y}-e)\mathrm{d}y-\int_1^2(e^{2y}-e)\mathrm{d}y$$

$$=-(\frac{1}{2}e^{2y}-ey)\Big|_{1/2}^{1}-(\frac{1}{2}e^{2y}-ey)\Big|_1^2$$

$$=-\frac{1}{2}e^4+e^2$$

注意 计算二重积分时要注意选择合适的积分次序，因为积分次序的不同将影响计算的难度。对有些题目，按某种积分次序有可能积不出来。选择积分次序的原则是，尽可能将区域少分块，第一次积分的上下限表达式要简单而且容易求原函数，同时根据第一次积分的结果容易求第二次积分。

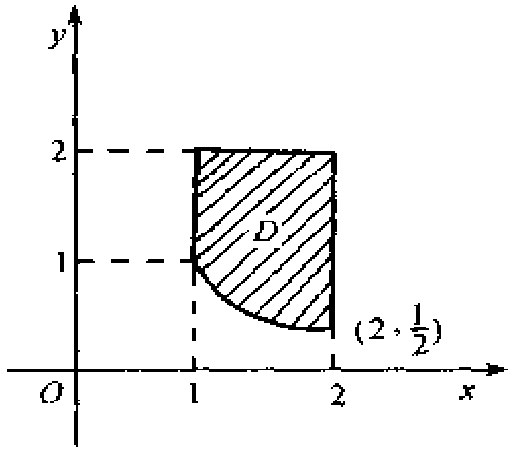


图 5-5

例 5 计算二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}d\sigma$。

分析 若用一般二重积分化为累次积分是计算不出结果的，根据被积函数和积分域的特点，可以看出 x,y 具有轮换对称性。

解 由轮换对称性得 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}d\sigma$，

从而 $I=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}[\frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}+\frac{a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}]d\sigma$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(a+b)d\sigma$$

$$=\pi R^2(a+b)/2$$

例 6 计算 $I=\iint\limits_{D}e^{(y-x)/(y+x)}dxdy$，其中 D 是以点 (0,0),(1,0) 和 (0,1) 为顶点的三角形内部（见图 5-6）。

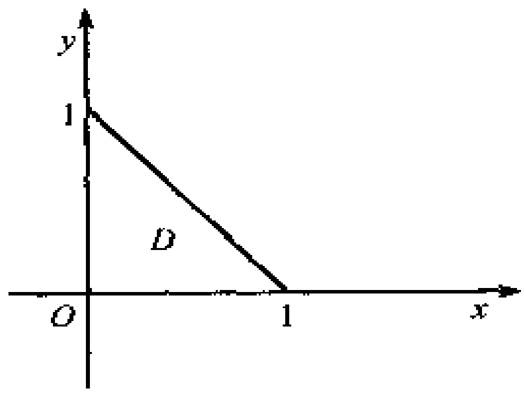


图 5-6

分析 1 此题的被积函数 $e^{(y-x)/(y+x)}$ 不管是先对横坐标积分，还是先对纵坐标积分都是“积不出”的。需要作某种变换，如果采用极坐标，其优点是被积

函数是指数函数变得与 r 无关，从而容易计算出对 r 的积分。

解法 1

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}\mathrm{e}^{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2(\sin\theta+\cos\theta)^2}\mathrm{e}^{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

（其中，令 $u=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta},\mathrm{d}u=\dfrac{2\mathrm{d}\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$ ）

分析 2 作变换令 $y-x=u$，$y+x=v$（见图 5-7），使被积函数变成 $\mathrm{e}^{u/v}$ 可以先对 u 积分。

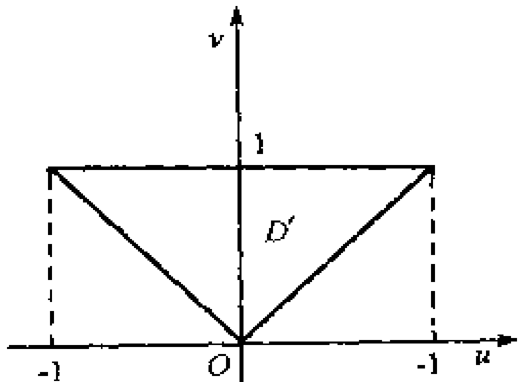


图 5-7

解法 2

令 $y-x=u$，$y+x=v$，于是 $x=(v-u)/2$，$y=(u+v)/2$。得 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\dfrac{1}{2}$

故 $$I=\iint_{D_1}|J|\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D_1}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^1[v\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}]_{-v}^{v}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

例 7 计算重积分 $I=\iint\limits_D\dfrac{2x+y}{x^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分域 D 是抛物线

$y^2=2x$ 和直线 $x+y=4$ ， $x+y=12$ 所围成的（见图 5-8）。

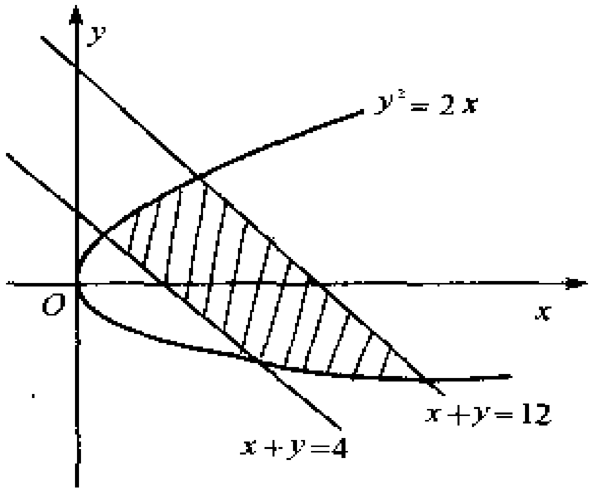


图 5-8

解法 1　化为直角坐标系下的累次积分， $y^2=2x$ 和两直线的交点分别为 (2,2)， (8,−4)， (8,4) 与 (18,−6)。

$$I=\int_2^8 dx\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}\frac{2x+y}{x^{3/2}}dy+$$

$$\int_8^{18}dx\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}\frac{2x+y}{x^{3/2}}dy$$

$$=\int_2^8\frac{1}{2x^{3/2}}(3x^2+4\sqrt{2}x^{3/2}-6x-16)dx+$$

$$\int_8^{18}\frac{1}{2x^{3/2}}(-3x^2+4\sqrt{2}x^{3/2}+22x+144)dx$$

$$=32\sqrt{2}$$

分析　运用变量代换法，由于 D 的边界是由抛物线 $y=\sqrt{2x}$ 和 $y=-\sqrt{2x}$ 及直线 $x+y=4$ ， $x+y=12$ 所围成。其中 $y=\sqrt{2x}$ 和 $y=-\sqrt{2x}$ 是曲线族 $y/\sqrt{x}=u$ 中对应于 $u=\sqrt{2}$ 和 $u=-\sqrt{2}$ 的两条曲线； $x+y=4$ ， $x+y=12$ 是直线族 $x+y=v$ 中对应于 $v=4$ 和 $v=12$ 的两条直线。当 $-\sqrt{2}\leqslant u\leqslant\sqrt{2}$ ， $4\leqslant v\leqslant 12$ 时，曲线族 $y/\sqrt{x}=u$ 中的曲线和直线族 $x+y=v$ 中的直线中的交点填满整个区域 D 。

解法 2　作变换 $y/\sqrt{x}=u$ ， $x+y=v$ ，把 xOy 平面上的区域 D 变为 $uO'v$ 平面上的矩形域 D^* ： $-\sqrt{2}\leqslant u\leqslant\sqrt{2}$ ， $4\leqslant v\leqslant 2$ （见图 5-9）

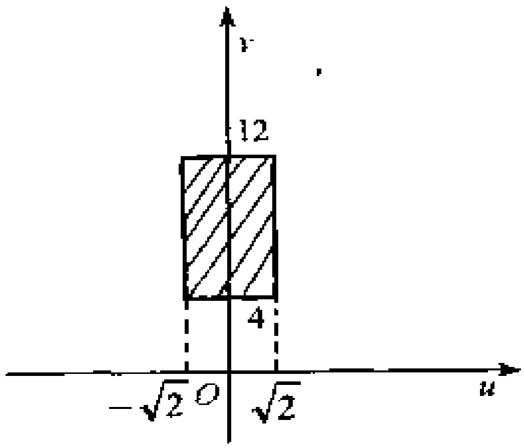


图 5-9

其雅可比式为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=1/\begin{vmatrix}-\dfrac{y}{2x\sqrt{x}} & 1\\ 1/\sqrt{x} & 1\end{vmatrix}=-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2x+y}$$

于是

$$I=\iint\limits_{D^*}\frac{2x+y}{x^{3/2}}|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{D^*}\frac{2x+y}{x^{3/2}}\frac{2x^{3/2}}{2x+y}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=2\iint\limits_{D^*}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}u\int_{4}^{12}\mathrm{d}v=32\sqrt{2}$$

例 8 计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{。}$$

分析 被积函数有绝对值符号，应先设法去掉。

解 由于$\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=\dfrac{1}{4}-(x-\dfrac{1}{2\sqrt{2}})^2-(y-\dfrac{1}{2\sqrt{2}})^2$，

因此如果将区域$D:\{x^2+y^2\leqslant 1\}$分为两个小区域（见图 5-10）

D_1：$\{(x-\dfrac{1}{2\sqrt{2}})^2+(y-\dfrac{1}{2\sqrt{2}})^2\leqslant\dfrac{1}{4}\}$及$D_2=D-D_1$，

当$(x,y)\in D_1$，$\left|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=\dfrac{1}{4}-(x-\dfrac{1}{2\sqrt{2}})^2-(y-\dfrac{1}{2\sqrt{2}})^2$，

当$(x,y)\in D_2$，$\left|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|=x^2+y^2-\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$，

由此得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}[\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2-(y-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\iint\limits_{D_2}[\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_1}[\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2-(y-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{D}[\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

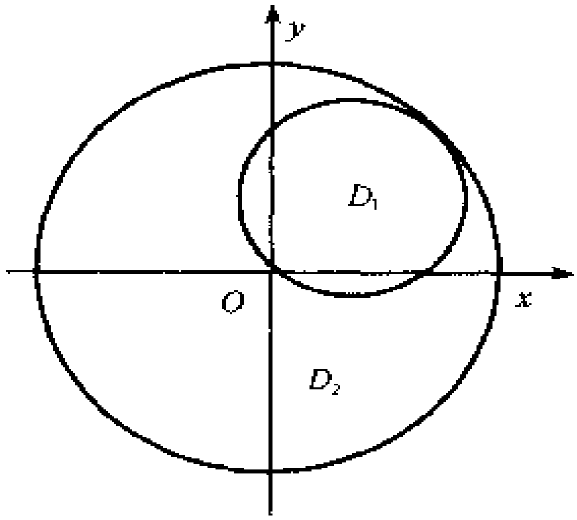


图 5-10

对等式右边第一个积分作变换

$$x-\frac{1}{2\sqrt{2}}=r\cos\varphi\text{，}\quad y-\frac{1}{2\sqrt{2}}=r\sin\varphi$$

对第二个积分作变换 $x=r\cos\varphi$， $y=\sin\varphi$ ，则得

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-r^2)r\mathrm{d}r-$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1[\frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{2}}-r^2]r\mathrm{d}r$$

$$=2\times 2\pi[\frac{r^2}{8}-\frac{r^4}{4}]_0^{1/2}+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$

$$=4\pi(\frac{1}{32}-\frac{1}{64})+2\pi\frac{1}{4}=\frac{9\pi}{16}$$

例 9 计算积分 $\iint_{x^2\le y\le 4}\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

分析　对于不连续函数，应分段进行积分再相加。

解　由对称性可知

$$\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D}\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中区域 D 为 $\{x\geqslant 0,x^2\leqslant y\leqslant 4\}$。

将 D 分为四个小区域 D_1,D_2,D_3,D_4（见图 5-11），则有

$$\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4}\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2[\iint\limits_{D_1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_4}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

$$=2[\iint\limits_{D_2+D_3+D_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(\sqrt{2}-1)\iint\limits_{D_3+D_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\iint\limits_{D_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\{\int_0^{\sqrt{3}}[4-(x^2+1)]\mathrm{d}x+(\sqrt{2}-1)\int_0^{\sqrt{2}}[4-(x^2+2)]\mathrm{d}x+$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\int_0^1[4-(x^2+3)]\mathrm{d}x\}$$

$$=2[2\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\frac{2}{3}]$$

$$=\frac{16}{3}(\sqrt{3}+1)-4\sqrt{2}$$

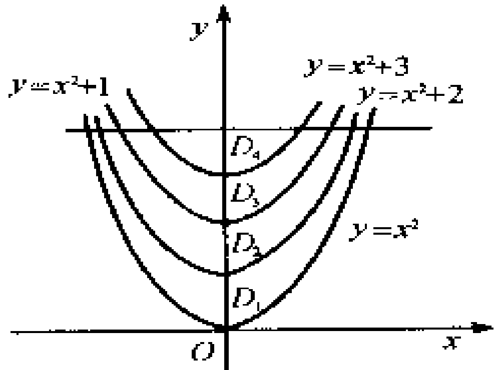


图 5-11

例 10　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明下面不等式成立，$[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$，其中等号仅在 $f(x)$ 为常数时成立。

分析　本题是定积分不等式证明题，可写成二重积分形式，利用重积分的性质证明。从 $\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$ 考虑推出要证的不等式。

证明　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(y)$ 也在 $[a,b]$ 上连续，从而 $[f(x)-f(y)]^2$ 在区域 D：$\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$ 上连续，且 $[f(x)-f(y)]^2\geqslant 0$，等号仅在 $f(x)$ 为常数时成立。

根据二重积分性质，有 $I=\iint\limits_D[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$，

由于 $I=\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$

$$=\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}y+\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y-2\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b f^2(x)(b-a)\mathrm{d}x+(b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}x-2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

$$=2(b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}x-2[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2\geqslant 0$$

所以 $[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$，其中等号仅在 $f(x)$ 为常数时成立。

注意　本不等式也可用一元积分的柯西-许瓦兹不等式进行证明，$[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$，（$f$ 与 g 及其平方在 $[a,b]$ 上可积）即 $g(x)=1$ 时，

$[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2\leqslant\int_a^b 1^2\mathrm{d}x\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$。

例 11　利用二重积分证明 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

分析　被积函数原函数不存在，直接求积分不可行。可以利用累次积分化为重积分来做。

证　设 $a>0$，令 $I(a)=\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，则

$$I^2(a)=(\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x)(\int_0^a\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y)$$

$$=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a\}$

记 $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$

$D_2=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2a^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$

则 $D_1\subset D\subset D_2$，如图 5-12 所示。　　又由于 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}>0$，故有

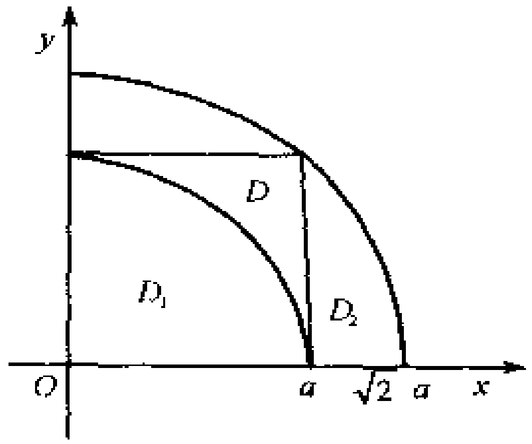


图 5-12

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant I^2(a) \leqslant \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式化为极坐标形式，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a e^{-r^2}r\mathrm{d}r \leqslant I^2(a) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a} e^{-r^2}r\mathrm{d}r$$

积分后得 $\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \leqslant I^2(a) \leqslant \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$

当 $a\to+\infty$ 时，$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})\to\frac{\pi}{4}$ 与 $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})\to\frac{\pi}{4}$，

因而 $\lim\limits_{a\to+\infty} I^2(a)=\pi/4$，即 $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)=\sqrt{\pi}/2$，$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}/2$。

例 12 计算积分 $I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\ (0<a<b)$。

分析 因为 $\lim\limits_{x\to0+}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=0$，$\lim\limits_{x\to1-}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=b-a$，故该积分是常义积分，但本题被积函数的原函数很难求出，不适合用牛顿-莱布尼兹公式计算，应采用其他方法。

解法 1 注意到 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\mathrm{d}y$，可以将该积分写成重积分的形式然后再进行计算。

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=\ln(y+1)\big|_a^b$$

$$=\ln(b+1)-\ln(a+1)$$

解法 2　如果把积分 I 看做是参变量 b 的函数，将 a 看作固定的常数，记为 $I(b)$，即 $I(b)=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$，由积分号下求导定理得，$I'(b)=\int_0^1\frac{x^b\ln x}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1x^b\mathrm{d}x=1/(b+1)$

于是 $I(b)=\ln(1+b)+C$，为了确定常数 C，在上式中令 $b=a$，得到 $I(a)=\ln(1+a)+C$

又显然 $I(a)=0$，从而 $C=-\ln(1+a)$，即得到

$$I=\ln(1+b)-\ln(1+a)$$

例 13　已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二次连续可微，$f(1)=0$。证明 $\left|\int_0^2f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M/3$。其中 $M=\max\limits_{X\in[0,2]}|f''(x)|$。

分析　可将定积分化为二重积分问题。交换积分次序，用分部积分公式和定积分的性质可证明不等式。

解　因为 $\int_1^xf'(t)\mathrm{d}t=f(t)\Big|_1^x=f(x)-f(1)=f(x)$，所以

$$\int_0^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{d}x\int_1^xf'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^xf'(t)\mathrm{d}t+\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^xf'(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1f'(t)\mathrm{d}t+\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^xf'(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\iint\limits_{D_1}f'(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint\limits_{D_2}f'(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^1f'(t)\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}x+\int_1^2f'(t)\mathrm{d}t\int_t^2\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1tf'(t)\mathrm{d}t+\int_1^2(2-t)f'(t)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^1f'(t)\mathrm{d}\frac{t^2}{2}-\int_1^2f'(t)\mathrm{d}\frac{(2-t)^2}{2}$$

$$=-(\frac{t^2}{2}f'(t)|_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{2}\mathrm{d}f'(t))-(\frac{(2-t)^2}{2}f'(t)\Big|_1^2-\int_1^2\frac{(2-t)^2}{2}\mathrm{d}f'(t))$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}t^2f''(t)\mathrm{d}t+\int_1^2\frac{1}{2}(2-t)^2f''(t)\mathrm{d}t$$

所以$|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x|\leqslant|\int_0^1\frac{1}{2}t^2f''(t)\mathrm{d}t|+|\int_1^2\frac{1}{2}(2-t)^2f''(t)\mathrm{d}t|$

$$\leqslant M[\int_0^1\frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t+\int_1^2\frac{1}{2}(2-t)^2\mathrm{d}t]=M/3$$

其中D_1：$\begin{cases}x\leqslant t\leqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，$D_2$：$\begin{cases}1\leqslant t\leqslant x\\1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$（如图 5-13）。

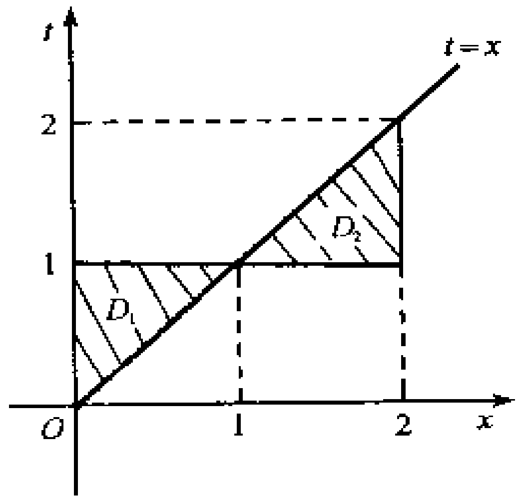


图 5-13

例 14 设二元函数$f(x,y)$在区域$D=\{0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$具有连续的四阶偏导数，$f(x,y)$在$D$的边界上恒为零，且$|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}|\leqslant 3$，证明$|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma|\leqslant 1/48$。（提示：考虑二重积分$\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}\sigma$）

分析 可以先将二重积分化为二次积分，得到$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$的估计表达式。

证明 $\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}d\sigma$

$$=\int_0^1 x(1-x)[\int_0^1 y(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dy]dx$$

$$=\int_0^1 x(1-x)[y(1-y)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\Big|_{y=0}^{y=1}+\int_0^1(2y-1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dy]dx$$

$$=\int_0^1 x(1-x)[(2y-1)f_{xx}\Big|_{y=0}^{y=1}-2\int_0^1 f_{xx}dy]dx$$

$$=\int_0^1 x(1-x)[f_{xx}(x,1)+f_{xx}(x,0)]dx-2\int_0^1[\int_0^1 x(1-x)f_{xx}(x,y)dx]dy$$

$$=x(1-x)[f_x(x,1)+f_x(x,0)]\Big|_{x=0}^{1}+\int_0^1(2x-1)[f_x(x,1)+f_x(x,0)]dx-$$

$$2\int_0^1[x(1-x)f_x(x,y)\Big|_{x=0}^{1}+\int_0^1(2x-1)f_x(x,y)dx]dy$$

$$=(2x-1)[f(x,1)+f(x,0)]\Big|_{x=0}^{1}-2\int_0^1[f(x,1)+f(x,0)]dx-$$

$$2\int_0^1[(2x-1)f(x,y)\Big|_{x=0}^{1}-2\int_0^1 f(x,y)dx]dy$$

$=4\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=4\iint f(x,y)d\sigma$，从而有

$$|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma|=\frac{1}{4}|\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}d\sigma|$$

$$\leqslant\frac{3}{4}|\iint\limits_D xy(1-x)(1-y)d\sigma|=\frac{3}{4}(\int_0^1 x(1-x)dx)^2=\frac{1}{48}$$

例 15 求 xOy 平面上的抛物线 $6y=x^2$ 从 $x=0$ 到 $x=4$ 的一段绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积。

解法 1 在 $6y=x^2$ 中，将 y^2 换为 y^2+z^2 便得到该旋转曲面方程 $36(y^2+z^2)=x^4$，将其曲面投影到 yOz 上，由 $x=4$ 和 $36(y^2+z^2)=x^4$ 消去 x，得该曲面在 xOy 平面上的投影域为 $D_{yz}=\{(y,z)|y^2+z^2\leqslant 64/9\}$（见图 5-14），由隐函数

$36(y^2+z^2)=x^4$ 求得 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{18y}{x^3}$， $\dfrac{\partial x}{\partial z}=\dfrac{18z}{x^3}$，因此所求面积为

$$S=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+\frac{18^2(y^2+z^2)}{x^6}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+\frac{3}{2\sqrt{y^2+z^3}}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{8/3}\sqrt{1+\frac{3}{2r}}\,r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{8/3}\sqrt{(r+\frac{3}{4})^2-(\frac{3}{4})^2}\,r\mathrm{d}r$$

$$=\pi\left[(r+\frac{3}{4})\sqrt{r^2+3r/2}-(\frac{3}{4})^2\ln(r+\frac{3}{4}+\sqrt{r^2+3r/2})\right]^{8/3}$$

$$=(820-81\ln 3)\pi/72$$

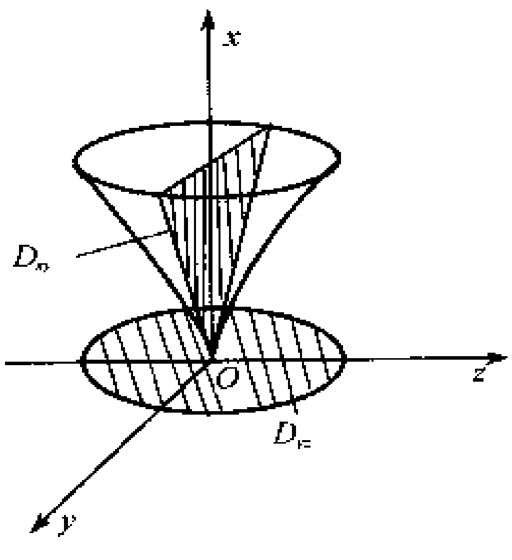


图 5-14

解法 2　将旋转曲面投影到 xOy 平面上，得到

$D_{xy}=\{(x,y)\left|-\frac{x^2}{6}\leqslant y\leqslant\frac{x^2}{6},0\leqslant x\leqslant 4\right\}$，并由 $36(y^2+z^2)=x^4$，

求得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^3}{18z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$，于是

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{x^3}{18z})^2+(-\frac{y}{z})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^4-36y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^4 x^2\sqrt{x^2+9}[\int_{-x^2/6}^{x^2/6}\frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}(6y)}{\sqrt{(x^2)^2-(6y)^2}}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^4 x^2\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x[\arcsin\frac{6y}{x^2}]_{-x^2/6}^{x^2/6}=\frac{\pi}{9}\int_0^4 x^2\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x$$

$$=(820-81\ln 3)\pi/72$$

例 16 设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，求 $F'(t)$。

解法 1 $F(t+\Delta t)-F(t)=\iiint\limits_{t^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant(t+\Delta t)^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_t^{t+\Delta t}f(\rho^2)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi f(\xi^2)\xi^2\Delta t\mathrm{d}\varphi$$

其中 ξ 在 t 与 $t+\Delta t$ 之间。

$$F'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi f(t^2)t^2\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi f(t^2)t^2(-\cos\varphi)|_0^{\pi}=4\pi t^2 f(t^2)$$

解法 2 因 $F(t)=\iiint\limits_{\rho^2\leqslant t^2}f(\rho^2)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{t}f(\rho^2)\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=4\pi\int_0^{t}f(\rho^2)\rho^2\mathrm{d}\rho$$

故 $F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$。

例 17 设函数 $f(x)$ 连续，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}v$，其中 Ω：$0\leqslant z\leqslant h$，$x^2+y^2\leqslant t^2$，求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^2}$。

分析 由于没有给出具体的被积函数，不可能计算三重积分，需要利用积分上限的函数或者洛比达法则求极限。

解 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}v$

$$=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^h z^2\mathrm{d}z+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^h\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{3}\pi h^3t^2+2\pi h\int_0^{|t|}f(r^2)r\mathrm{d}r\text{。}$$

当 $t>0$ 时，$F(t)=\dfrac{1}{3}\pi h^3t^2+2\pi h\displaystyle\int_0^{t}f(r^2)r\mathrm{d}r$

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}\pi h^3t+2\pi hf(t^2)t$$

当 $t<0$ 时，$F(t)=\dfrac{1}{3}\pi h^3t^2+2\pi h\displaystyle\int_0^{-t}f(r^2)r\mathrm{d}r$

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}\pi h^3t+2\pi hf[(-t)^2](-t)(-1)$$

$$=\frac{2}{3}\pi h^3t+2\pi hf(t^2)t$$

于是有 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F'(t)}{2t}=\lim\limits_{t\to 0}[\dfrac{\pi}{3}h^3+\pi hf(t^2)]$

$$=\frac{\pi}{3}h^3+\pi hf(0)$$

例 18 求平面曲线 AB 的方程（见图 5-15），使图形 $OABC$ 绕 x

轴旋转所形成的旋转体的重心的横坐标等于点C的横坐标的4/5（假定密度$\rho = 1\text{g}/\text{cm}^3$）。

解 设曲线AB的方程为$y = f(x)$，$C(x,0)$，$B(x,f(x))$，且旋转曲面的方程为$z^2 + y^2 = f^2(x)$，Ω是由$x = 0$，$x = c$及$z^2 + y^2 = f^2(x)$所围的空间区域，则旋转体的重心的x坐标$\bar{x} = 4x/5$，即有

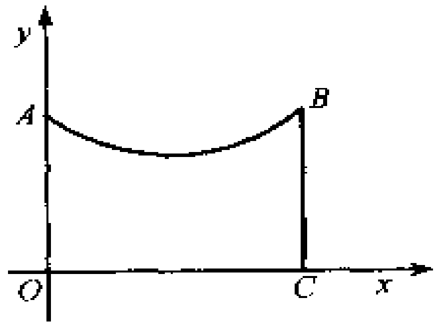


图 5-15

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v} = \frac{4}{5}x \text{，即 } \frac{4}{5}x\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v$$

$$\frac{4}{5}\int_0^x \pi f^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^x x\mathrm{d}x\int_{-f(x)}^{f(x)}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^x x\mathrm{d}x\int_{-f(x)}^{f(x)} 2\sqrt{f^2(x) - y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^x x\left[\frac{y}{2}\sqrt{f^2(x) - y^2} + \frac{f^2(x)}{2}\arcsin\frac{y}{f(x)}\right]\Bigg|_{-f(x)}^{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^x xf^2(x)\mathrm{d}x$$

于是得$\frac{4}{5}x\int_0^x \pi f^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^x xf^2(x)\mathrm{d}x$

上式两端对x求导得

$$\frac{4}{5}\int_0^x f^2(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{5}xf^2(x) = xf^2(x)$$

即 $4\int_0^x f^2(x)\mathrm{d}x = xf^2(x)$

再对x求一次导

$$4f^2(x) = f^2(x) + x\cdot 2f(x)f'(x)$$

化简得 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分得$f(x) = Cx^{3/2}$，

其中，C为任意常数，故所求曲线为$y = Cx^{3/2}$。

例 19 设 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为域 $0\leqslant x_i\leqslant x(i=1,2,\cdots,n)$ 内的连续函数。证明等式

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f dx_n=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f dx_1\quad(n\geqslant 2)$$

分析 可以用数学归纳法进行证明。

证明 先证明 $n=2$ 时等式成立，即证

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}f(x_1,x_2)dx_2=\int_0^x dx_2\int_{x_2}^x f(x_1,x_2)dx_1$$

由于积分域为图 5-16 中所示的三角形区域，经交换积分次序后即得上式。

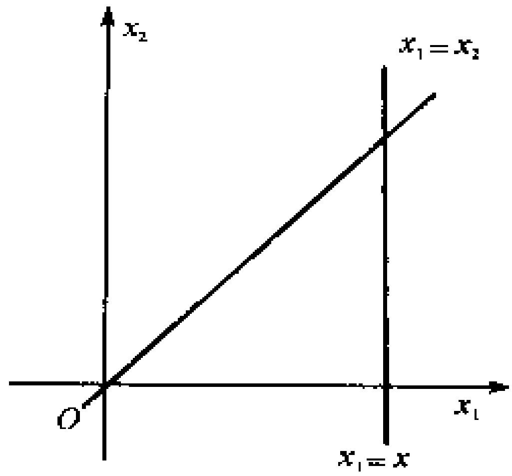


图 5-16

再证 $n=3$ 时等式成立。令

$$F(x_1,x_2)=\int_0^{x_2}f(x_1,x_2,x_3)dx_3$$

则 $\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}f(x_1,x_2,x_3)dx_3$

$$=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}F(x_1,x_2)dx_2$$

$$=\int_0^x dx_2\int_{x_2}^x F(x_1,x_2)dx_1$$

$$=\int_0^x\left[\int_{x_2}^x dx_1\int_0^{x_2}f(x_1,x_2,x_3)dx_3\right]dx_2$$

由于积分 $\int_{x_2}^x dx_1\int_0^{x_2}f(x_1,x_2,x_3)dx_3$ 中的积分限是常数，故

$$\int_{x_2}^x dx_1\int_0^{x_2}f(x_1,x_2,x_3)dx_3=\int_0^{x_2}dx_3\int_{x_2}^x f(x_1,x_2,x_3)dx_1$$

代入上式并设 $G(x_1,x_2)=\int_{x_2}^x f(x_1,x_2,x_3)dx_1$，则得

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}f(x_1,x_2,x_3)dx_3$$

$$=\int_0^x dx_2\int_0^{x_2}dx_3\int_{x_2}^x f(x_1,x_2,x_3)dx_1$$

$$=\int_0^x dx_2\int_0^{x_2}G(x_2,x_3)dx_3$$

$$=\int_0^x dx_3\int_{x_3}^x G(x_2,x_3)dx_2$$

$$=\int_0^x dx_3\int_{x_3}^x dx_2\int_{x_2}^x f(x_1,x_2,x_3)dx_1$$

假设要证明的公式对$n-1$时成立，则有

$$I_n=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f dx_n$$
$$=\int_0^x dx_2\int_{x_2}^{x_1}dx_1\int_0^{x_2}dx_3\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1,\cdots,x_n)dx_n$$
$$=\int_0^x\left[\int_{x_2}^{x_1}dx_1\int_0^{x_2}dx_3\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1,\cdots,x_n)dx_n\right]dx_2\text{。}$$

由于上式中的方括号中积分变量x_1的积分限是常数，故

$$\int_{x_2}^{x_1}dx_1\int_0^{x_2}dx_3\cdots\int_0^{x_{n-1}}f(x_1,\cdots,x_n)dx_n$$
$$=\int_0^{x_2}dx_3\cdots\int_0^{x_{n-1}}dx_n\int_{x_2}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)dx_1$$

令$H(x_2,\cdots,x_n)=\int_{x_2}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)dx_1$，且根据归纳法的假定，即得

$$I_n=\int_0^x dx_2\int_0^{x_2}dx_3\cdots\int_0^{x_{n-1}}H(x_2,\cdots,x_n)dx_n$$
$$=\int_0^x dx_n\int_{x_{n-1}}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_3}^x H(x_2,\cdots,x_n)dx_2$$
$$=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f(x_1,\cdots,x_n)dx_1$$

例 20 设$f(u)$和$g(u)$都是连续函数，且$g'(u)$也连续，则有

$$I_{n+1}=\int_0^x g'(x_1)dx_1\int_0^{x_1}g'(x_2)dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}g'(x_n)dx_n\int_0^{x_n}f(x_{n+1})dx_{n+1}$$
$$=\frac{1}{n!}\int_0^x[g(x)-g(u)]^n f(u)du$$

证明 对积分$\int_0^x g'(x_1)dx_1\int_0^{x_1}f(x_2)dx_2$交换积分次序，得

$$I_2=\int_0^x f(x_2)dx_2\int_{x_2}^{x_1}g'(x_1)dx_1=\int_0^x[g(x)-g(u)]^n f(u)du$$

即当$n=1$时原公式成立。

今设原公式对于$n-1$时成立，我们考察I_{n+1}，得

$$I_{n+1}=\int_0^x\left[\int_0^{x_1}g'(x_2)dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}g'(x_n)dx_n\int_0^{x_n}f(x_{n+1})dx_{n+1}\right]g'(x_1)dx_1$$
$$=\frac{1}{n!}\int_0^x\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x_1}[g(x)-g(u)]^n f(u)du\right]g'(x_1)dx_1$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\int_u^x[g(x_1)-g(u)]^{n-1}g'(x_1)\mathrm{d}x_1$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(u)\cdot\frac{1}{n}[g(x_1)-g(u)]^n\Big|_{x_1=u}^{x_1=x}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{n!}\int_0^x[g(x)-g(u)]^n f(u)\mathrm{d}u$$

说明　特别地取 $g'(x)=1$，我们就得到

$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-u)^n f(u)\mathrm{d}u$，该公式的证明还有其他方法。我们把它放进例 21。

例 21　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试证，对于任意的 x 有

$\int_a^x\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n\int_a^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-y)^n f(y)\mathrm{d}y$。

证明 1　利用微分法求递推公式，记

$$I_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-y)^n f(y)\mathrm{d}y$$

则　$I_n'(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y=I_{n-1}(x)$

因 $I_n(a)=0$，所以 $I_n(x)=\int_a^x I_n'(x_1)\mathrm{d}x_1=\int_a^x I_{n-1}(x_1)\mathrm{d}x_1$

反复利用此递推公式，得

$$I_n(x)=\int_a^x I_{n-1}(x_1)\mathrm{d}x_1=\int_a^x\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}I_{n-2}(x_2)\mathrm{d}x_2$$
$$=\cdots=\int_a^x\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_{n-1}}I_0(x_n)\mathrm{d}x_n$$

又　$I_0(x)=\int_a^{x_n}f(y)\mathrm{d}y=\int_a^{x_n}f(x_{n-1})\mathrm{d}x_{n+1}$

所以　$\int_a^x\mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_a^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n\int_a^{x_n}f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1}$

$$=I_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-y)^n f(y)\mathrm{d}y$$

证明 2　利用泰勒展开式，设

$$g(x)=\int_a^x\mathrm{d}x_1\cdots\int_a^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n\int_a^{x_n}f(x_{n-1})\mathrm{d}x_{n+1}-\frac{1}{n!}\int_a^x(x-y)^n f(y)\mathrm{d}y$$

显然 $g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(n)}(a)=0$， $g^{(n+1)}(a)=f(x)-f(x)=0$
由泰勒公式即得 $g(x)\equiv 0$，即原结论成立。

5.3 自测题及提示

5.3.1 自测题

1. 计算积分 $\iint\limits_{0\leqslant x,y\leqslant\pi}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

2. 计算积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 5}\mathrm{sgn}(x^2-y^2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

3. 证明不等式 $\frac{61}{165}\pi\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{2}{5}\pi$。

4. 设函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值连续函数，试证 $\iint\limits_{D}\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant$
$(b-a)^2$，其中 D：$a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$。

5. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正值函数，且 $f(x)$ 单调减少，证明
$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$。

6. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{V}\cos(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
其中 a,b,c 是不全为 0 的常数，$V:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$。

7. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V$，其中 Ω 为两个球面 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 与
$x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分。

8. 设函数 $f(u)$ 具有连续的导数，求
$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}V$。

9. 求曲面 $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^3=27abcxyz$ 围成的体积，其中 $a>0$，
$b>0$，$c>0$。

10. 证明柳维耳公式

$$\iint\limits_D \cdots \int f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2\cdots p_n)}\cdot\int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}\mathrm{d}u$$

（$p_1,p_2,\cdots,p_n>0$），其中 $f(u)$ 为连续函数，积分区域为 D：$x_1,x_2,\cdots x_n\geqslant 0$，$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1$。

5.3.2 自测题提示

1. 带有绝对值的函数的积分，关键是分割积分区域，使被积函数在个小区域内不变号，本题可将积分区域分成四个小区域（见图5-17）。

2. 被积函数在积分区域的不同部分上，具有不同的（初等函数的）表达式，应将区域分成不同的部分，分别相加。再注意到本题被积函数及积分区域都关于坐标轴对称，因此只要计算第一象限的部分的四倍（见图 5-18）。

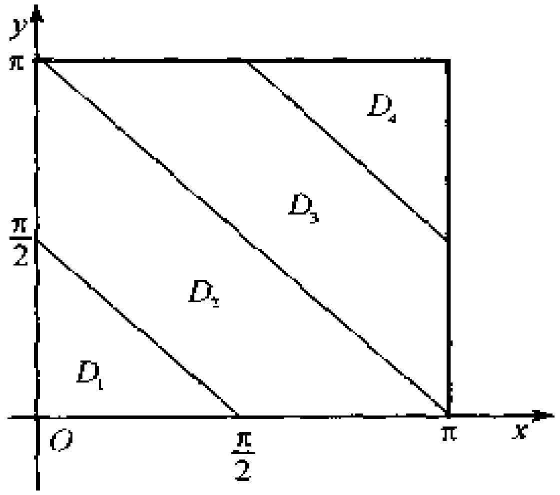


图 5-17

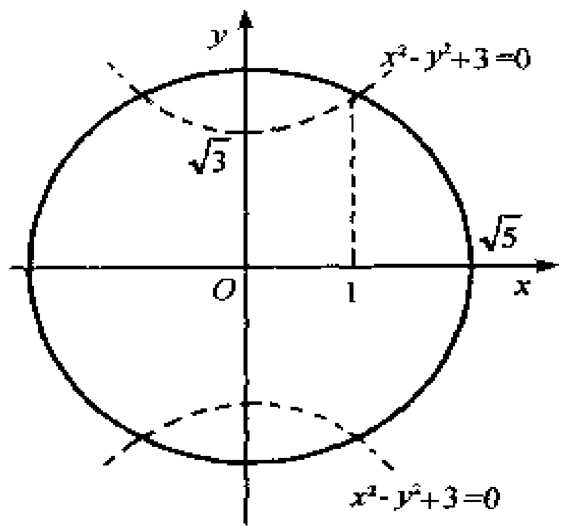


图 5-18

3. 由于 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}\sigma=2\pi\int_0^1 r\sin r^3\mathrm{d}r$，又知对于任意的实数 t，$t-\frac{t^3}{3!}\leqslant\sin t\leqslant t$，于是 $r^3-\frac{r^9}{3!}\leqslant\sin r^3\leqslant r^3$，利用定积分的性质即可得证。

4. 注意到积分区域的特点，利用轮换对称性即可得证。

5. 用重积分进行证明，关键是将定积分的乘积化为重积分。

6. 作坐标轴的旋转变换，将 xOy 旋转到 $ax+by+cz=0$ 的位置上，再引进柱坐标进行计算。

7. 可选择柱坐标系、球坐标系，也可用直角坐标系计算。

8. 所求极限中有一个含参变量的三重积分，由于没有给出具体的被积函数，不可能计算出三重积分，需要利用积分上限的函数来计算极限。

9. 由于 $xyz\geqslant 0$，所以曲面位于第一、第三、第六与第八等四个卦限内，又由于曲面上的点有一个坐标为零时，其他两个也为零，所以坐标轴与坐标平面和曲面只相交于原点，再由对称性可知四个卦限内所围区域的体积都相同，因此所求体积等于第一卦限体积的四倍。用广义球坐标变换即可计算。

10. 可以运用数学归纳法进行证明。

第 6 章　曲线积分与曲面积分

6.1　内容提要

本章主要讨论曲线积分和曲面积分问题。基本内容是两类曲线积分的计算及关系，格林公式及平面曲线积分与路径无关的条件，两类曲面积分的计算及关系，高斯公式，斯托克斯公式，曲线积分和曲面积分的应用等。

曲线积分的计算，应适当利用对称性、轮换对称性，在化为定积分进行计算时，应选择合适的参数。曲线积分和重积分联系的纽带是格林公式，很多情况下封闭曲线上的曲线积分可化为重积分来计算，另外开口曲线有时补上一条曲线再应用格林公式也能简化运算。在曲线积分和路径无关情况下，选取方便的路径进行积分。

对于第一类型的曲面积分，计算的方法通常包含利用对称性，直接使用公式（直角坐标公式或参数方程公式），化为第二型曲面积分，利用高斯公式等。计算第二型曲面积分的方法主要有利用对称性，利用公式化为二重积分，利用高斯公式化为三重积分等。

6.2　例题解析

例 1　计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$，$L$：由圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围图形的边界。

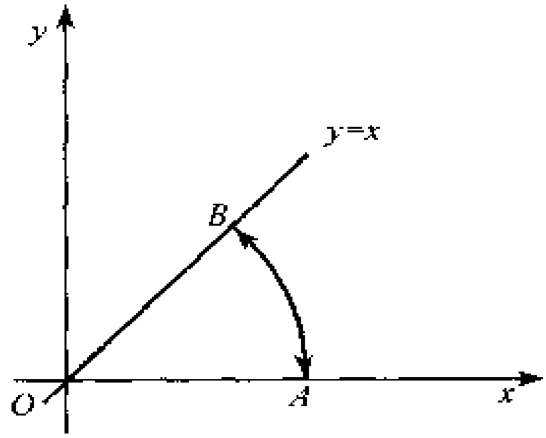


图 6-1

分析　计算曲线积分的方法一般是化为定积分，关键是将曲线方程用参数方程表示，对于第一类曲线积分化为定积分，其积分下限总小于上限。

解　如图 6-1 所示，$\overline{OA}$：$y=0(0\leqslant x\leqslant a)$　$\widehat{AB}$：$x=a\cos t$，

$y=a\sin t\,(0\leqslant t\leqslant \pi/4)$ $\overline{BO}$：$y=x\,(0\leqslant x\leqslant \sqrt{2}a/2)$

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\oint_{\overline{OA}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\oint_{\widehat{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\oint_{\overline{BO}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$$

$$=\int_0^a e^x dx+\int_0^{\pi/4} e^a a dt+\int_0^{\sqrt{2}a/2} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx$$

$$=e^a-1+\frac{\pi}{4}ae^a+e^a-1=2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$$

例 2 计算$\oint_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中L为曲线$x^2+y^2+z^2=9/2$与平面$x+z=1$的交线。

分析 此题的关键是如何将由曲面$x^2+y^2+z^2=9/2$与平面$x+z=1$的交线L用参数方程表示，为此，先将曲线L的方程作适当的变形。

解 由$x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$及$x+z=1$消去z得

$$x^2+y^2+(1-x)^2=9/2 \quad 即 \quad \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$$

即L的方程可表示为$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$和$x+z=1$

将此方程化为参数方程为

$$x=\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos t,\quad y=2\sin t,\quad z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

则$\oint_L (x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\int_0^{2\pi}[(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos t)^2+4\sin^2 t+(\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos t)^2]2dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}+4\cos^2 t+4\sin^2 t)dt=18\pi$$

例 3 $\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$沿着不与$y=x$相交的途径。

分析 该曲线积分和路径无关，可以用全微分方法求解。

解 由于途径不与$y=x$相交，故$x-y\neq 0$。

我们可以通过简易的试探，得到 $\frac{1}{2}\mathrm{d}\frac{x+y}{x-y}=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$，故知 $\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ 为全微分。由此得到

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=[\frac{1}{2}\frac{x+y}{x-y}]_{(0,-1)}^{(1,0)}=\frac{1}{2}[1-(-1)]=1$$

也可以直接验证被积表达式满足全微分的充要条件。对于本题

$$P=-\frac{y}{(x-y)^2},\quad Q=\frac{x}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{2y}{(x-y)^3}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{2x}{(x-y)^3}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}$$

即 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故知 $\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ 为全微分。

今取由 $A(0,-1)$ 到 $B(1,0)$ 的途径为直线段 AB（见图 6-2），其方程为 $y=x-1\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$。由此得

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\int_0^1[x-(x-1)]\mathrm{d}x=1$$

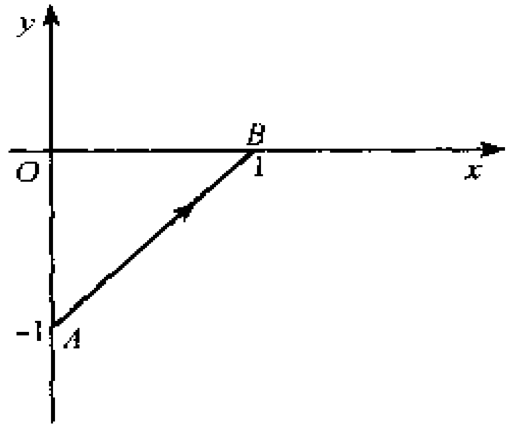


图 6-2

例 4 计算曲线积分

$$\int_{AmB}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y,$$

式中 $\varphi(y)$ 与 $\varphi'(y)$ 为连续函数，AmB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任何路径，但与线段 AB 围成已知大小为 S 的面积 $AmBA$。

分析 增加一条曲线使曲线闭合，利用格林公式进行计算。

解 考虑沿闭路线 $AmBA$ 的线积分（见图 6-3）。用格林公式得

$$\oint_{AmBA}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y$$

$$=\iint\{\frac{\partial}{\partial x}[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]-\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= m\iint\limits_{S} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = mS$$

直线段 AB 的方程为 $y = kx + b\,(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$，其中 $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$，$b = \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$，故

$$\int_{AB} [\varphi(y)\mathrm{e}^x - my]\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\mathrm{e}^x - m]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \{[\varphi(kx+b) + k\varphi'(kx+b)]\mathrm{e}^x - m(kx+b) - mk\}\mathrm{d}x$$

$$= [\varphi(kx+b)\mathrm{e}^x]_{x_1}^{x_2} - \frac{mk}{2}(x_2^2 - x_1^2) - m(b+k)(x_2 - x_1)$$

$$= e^{x_2}\varphi(y_2) - \mathrm{e}^{x_1}\varphi(y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(kx_2 + kx_1 + 2b) - mk(x_2 - x_1)$$

$$= \mathrm{e}^{x_2}\varphi(y_2) - \mathrm{e}^{x_1}\varphi(y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - m(y_2 - y_1)$$

从而 $\int_{AmB} [\varphi(y)\mathrm{e}^x - my]\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\mathrm{e}^x - m]\mathrm{d}y$

$$= mS + \int_{AB} [\varphi(y)\mathrm{e}^x - my]\mathrm{d}x + [\varphi'(y)\mathrm{e}^x - m]\mathrm{d}y$$

$$= mS + \mathrm{e}^{x_2}\varphi(y_2) - \mathrm{e}^{x_1}\varphi(y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - m(y_2 - y_1)$$

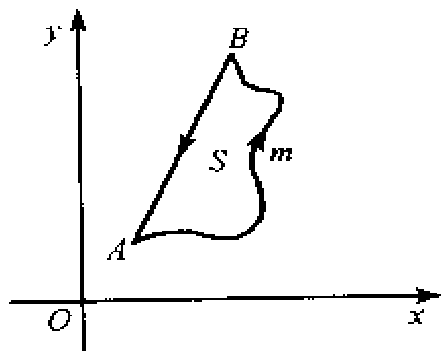


图 6-3

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面内有向分段光滑曲线，其起点为 $A\,(a,b)$，终点为 $B\,(c,d)$，记 $I = \int_L \dfrac{1 + y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]\mathrm{d}y$，当 $ab = cd$ 时，求积分值。

分析　易知积分与路径无关，可以选择合适的积分路径进行计算，也可以利用全微分计算。

解法 1　由于 $P=\dfrac{1+y^2f(xy)}{y}$，

$Q=\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2f(xy)+xy^3f'(xy)-1}{y^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

所以积分与路径无关。

可以选择上半平面内任意一条曲线作为积分路径。此处选择折线 $AC+CB$，如图 6-4 所示。

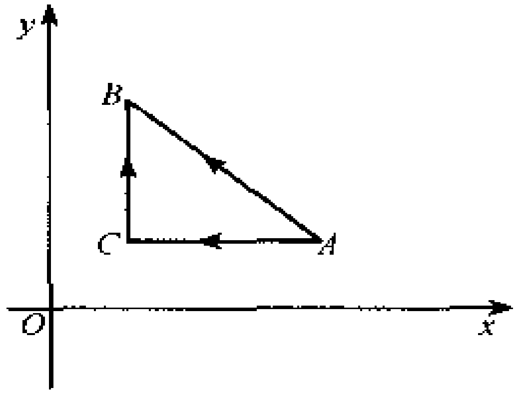


图 6-4

$$I=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d\frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

解法 2　可选过 A,B 两点的双曲线为积分路径。设 L 为 $xy=ab$，起点为 $A\ (a,b)$，终点为 $B\ (c,d)$（见图 6-5）。

$$I=\int_L\frac{x}{ab}[1+\frac{a^2b^2}{x^2}f(ab)]\mathrm{d}x+\frac{x^3}{a^2b^2}[\frac{a^2b^2}{x^2}f(ab)-1]\frac{-ab}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_L[\frac{x}{ab}+\frac{ab}{x}f(ab)+\frac{x}{ab}-\frac{ab}{x}f(ab)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_L\frac{2x}{ab}\mathrm{d}x=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

解法 3　可选过 A,B 两点的直线为积分路径。设 L 的方程为

$y-b=k(x-a)$，其中 $k=\dfrac{d-b}{c-a}$。

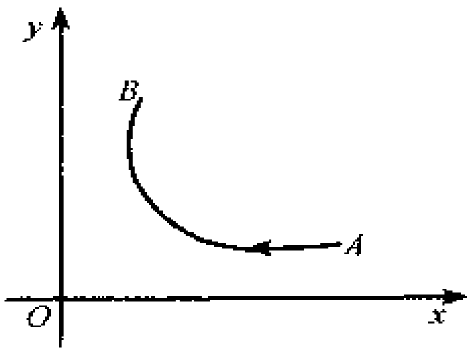


图 6-5

$$I=\int_a^c\{\frac{1}{y}+yf(xy)+[xf(xy)-\frac{x}{y^2}]k\}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^c\left[\frac{y-kx}{y^2}+(y+kx)f(xy)\right]\mathrm{d}x$$

$$=(b-ka)\int_a^c\frac{1}{(kx+b-ka)^2}\mathrm{d}x+\int_a^c f(kx^2+bx-kax)\mathrm{d}(kx^2+bx-kax)$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

例 6　计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截那部分的面积。

解　所求面积为

$$S=2\int_C z\mathrm{d}s=2\int_C\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}s,$$

其中 C 为 xOy 平面上的圆周 $x^2+y^2=ax$。将此配方后得

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

故得曲线 C 的参数方程为

$$x=\frac{a}{2}(1+\cos t),$$

$$y=\frac{a}{2}\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)。$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}[(-\sin t)^2+(\cos t)^2]}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a}{2}\mathrm{d}t$$

又被积函数为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-ax}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos t)}=a\left|\sin\frac{t}{2}\right|。$$

故得 $S=2\int_0^{2\pi}a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\cdot\frac{a}{2}\mathrm{d}t$

$$=a^2\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}\sin\tau \mathrm{d}\tau = 4a^2$$

例 7 计算积分 $\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，式中 S 为曲面 $x^2+z^2=2az(a>0)$ 被圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割的部分是在上半个圆柱面上的部分。

解 这两张曲面的交线是（见图 6-6）。

$$\begin{cases} x^2+(z-a)^2=a^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

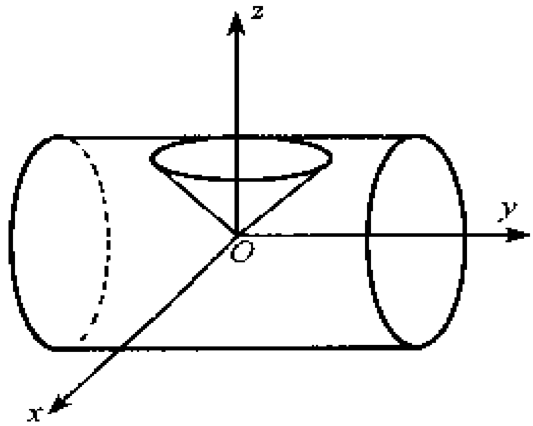


图 6-6

消去 z 后得 xOy 平面上的投影曲线为 $(a+\sqrt{a^2-x^2})^2=x^2+y^2$

即 $y^2=2(a^2-x^2)+2a\sqrt{a^2-x^2}$，

这是柱面被锥面所割部分在 xOy 平面上投影域的边界曲线。

将 $x^2+(z-a)^2=a^2$ 对 x 及 y 求偏导数后可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z-a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

由此得 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{x^2}{(z-a)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

由对称性可知，所求积分等于沿曲面 S 在第一卦限部分的积分的 4 倍。它化为重积分得

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}S=4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2(a^2-x^2)+2a\sqrt{a^2-x^2}}}\cdot(a+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=4a\int_0^a\sqrt{2(a^2-x^2)+2a\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(a+\sqrt{a^2-x^2})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=4a^3\int_0^{\pi/2}\sqrt{2}\sqrt{\cos^2 t+\cos t}(1+\cos t)\mathrm{d}t \qquad (x=a\sin t)$$

$$=4\sqrt{2}a^3\int_0^{\pi/2}(1+\cos t)^{3/2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=16a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\frac{t}{2}\sqrt{1-2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{t}{2}\sqrt{1-2\sin^2\frac{t}{2}}d(\sin\frac{t}{2})$$

$$=32a^3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-u^2)\sqrt{1-2u^2}du \qquad (u=\sin\frac{t}{2})$$

$$=32\sqrt{2}a^3[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}du+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{2}-u^2)^{\frac{3}{2}}du]$$

又因 $\int_0^r\sqrt{r^2-u^2}du=\pi r^2/4$

$$\int_0^r(r^2-u^2)^{\frac{3}{2}}du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^4\cos^4\theta d\theta=3\pi r^4/16$$

从而得到

$$\iint\limits_S zdS=32\sqrt{2}a^3[\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{64}]=\frac{7}{\sqrt{2}}\pi a^3$$

例 8 $\iint\limits_S(x^2+y^2)dS$，式中 S 为体积 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 的边界（见图 6-7）。

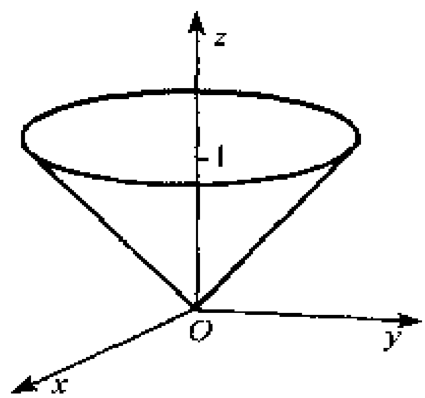


图 6-7

分析 曲面由两部分组成，分别计算后相加。

解 曲面 S 可以分为两部分 S_1 和 S_2，其中 S_1 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分；S_2 是平面 $z=1$ 上 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的部分。S_1 和 S_2 在 $x0y$ 平面上的投影域都是 $x^2+y^2\leqslant 1$。

$$dS_1=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

$$dS_2=dxdy$$

故得 $\iint\limits_S(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)dS_1+\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS_2$

$$=(\sqrt{2}+1)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(\sqrt{2}+1)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$

$$=(\sqrt{2}+1)2\pi\,\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$$

例 9 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S\frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{2\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧。

分析 充分利用球面 S 的对称性，可将组合曲面积分化为对 x,y 的单一曲面积分，再将此曲面积分化成二重积分计算。

解 利用曲面 S 的对称性，

$$I=\iint\limits_S\frac{2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}+\frac{2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos^2 z}-\frac{2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

$$=\iint\limits_S\left(\frac{1}{z\cos^2 z}+\frac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_S\frac{1}{z\cos^2 z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_S\frac{1}{\cos^2 z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而 $\iint\limits_S\frac{1}{\cos^2 z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\cos^2(-\sqrt{1-x^2-y^2})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

所以 $I=\iint\limits_S\frac{1}{z\cos^2 z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$=4\pi\int_0^1\frac{-\mathrm{d}\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$= 4\pi \int_1^0 \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-r^2}}{\cos^2 \sqrt{1-r^2}}$$

$$= 4\pi \tan\sqrt{1-r^2}\Big|_1^0$$

$$= 4\pi \tan 1$$

例 10 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中 S 为球壳 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外表面。

解 先计算

$$I_3 = \iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{S^-_1} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S^+_2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S_1^- 为下半球面 $z-c=-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ 取下侧，

S_2^+ 为上半球面 $z-c=-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ 取上侧。

将被积函数 z^2 的形式改变为 $z^2=(z-c)^2+c^2+2c(z-c)$。

由于等式右边前两项沿下半球面与沿上半球面的上侧积分时数值相等，但符号相反，因此互相抵消。最后一项沿下半球面积分时被积函数取负值，但由于取球面的下侧，因此它和沿上半球面取上侧取积分时有相同的数值，故得

$$I_3 = 2\iint\limits_{S_2^+} 2c(z-c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4c \iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 8\pi\, c\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{8}{3}\pi\, cR^3$$

$$I_1 = \iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\pi\, aR^3,\quad I_2 = \iint\limits_S y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\pi\, bR^3$$

故得 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{8}{3}\pi\, R^3(a+b+c)$

例 11 计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中Σ是抛物线 $z=x^2+y^2$ 被 $z=4$ 割下的有限部分的上侧，$\cos\partial,\cos\beta,\cos\gamma$ 是Σ上各点法线方向余弦。

分析 可以先用两类曲面积分的关系进行转化，再利用高斯公式进行计算。

解 由两类曲面积分关系有 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

补一块曲面 Σ_1： $z=4$， $x^2+y^2\leqslant 4$ 法向向下，则 $\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$，其中 $\Sigma+\Sigma_1$ 为内侧。

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-16\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-64\pi$

由高斯公式得 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=-2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$=-2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{4}z\mathrm{d}z=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}[16-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(16-r^4)r\mathrm{d}r=-64\pi+64\pi/3$

所以 $I=(-64\pi+\dfrac{64\pi}{3})+64\pi=64\pi/3$

例 12 计算积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中：Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

分析 积分球面Σ虽为封闭的，但由于 $\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，$\dfrac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，$\dfrac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ 在Σ所围区域内一阶偏导不连续，因此不能直接用高斯公式计算，但可通过适当的变形后再利用高斯公式计算，也可利用两类曲面积分之间的关系计算。

解法 1 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

$$=\frac{1}{a^3}\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^3}\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi$$

解法 2 利用两类曲面积分之间的关系，将第二类曲面积分转化为第一类曲面积分。

Σ： $x^2+y^2+z^2=a^2$，其上任一点(x,y,z)处的单位法向量

$$\overrightarrow{n_0}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{x,y,z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\oiint\limits_{\Sigma}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}s=4\pi$$ 。

例 13 计算积分

$\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是

$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$所围立体表面外侧。

解 由高斯公式知

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

计算三重积分时引进变换：$\begin{cases}x'=x-y+z\\y'=y-z+x\\z'=z-x+y\end{cases}$

则$\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}=4$，于是$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',y',z')}=\frac{1}{4}$

从而 $I=\iiint\limits_{|x'|+|y'|+|z'|\leq 1}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'=\frac{3}{4}\times 8\times\frac{1}{6}=1$

例 14 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 S^+ 是 $1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}$ $(z\geqslant 0)$的上侧。

分析 直接计算此曲面积分是相当困难的，应该利用高斯公式，考虑到被积函数表达式中有分母 $(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$，所以在增补曲面一构成封闭曲面时，要注意所增补的曲面不能过原点，同时所构成的封闭曲面不要包围原点。

解 以Γ 表示以原点为中心的上半单位球面$(z\geqslant 0)$，可以验证Γ 被包围在 S 的内部，Γ 的内侧和外侧分别表示为Γ_1和Γ_2，记Σ_1为平面 $z=0$ 上满足 $\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 1\text{h} \\ \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}\leqslant 1\end{cases}$ 部分的下侧，这样 $S^+ +\Gamma_1+\Sigma_1$ 构成一个封闭曲面的外侧，此封闭曲面既不经过也不包围坐标原点（见图 6-8）。

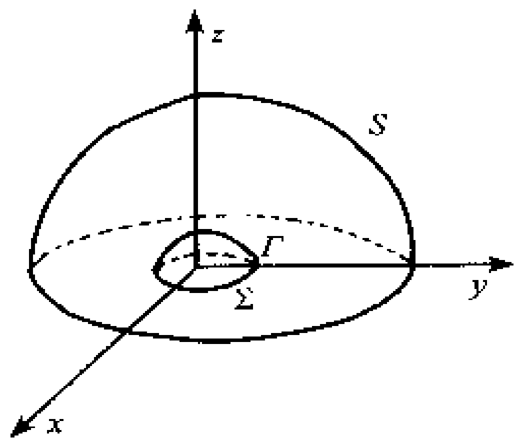


图 6-8

于是

$$I=\iint\limits_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\oiint\limits_{S^+ +\Gamma_1+\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$-\iint\limits_{\Gamma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

其右端的第一项，由高斯公式得

$$\oiint\limits_{S^+ +\Gamma_1+\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\iiint\limits_{V}\frac{3(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\mathrm{d}V=0$$

其中V是$S^+ + \Gamma_1 + \Sigma_1$所包围的区域；其第三项显然为 0，所以有

$$I = -\iint\limits_{\Gamma_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iint\limits_{\Gamma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再一次利用高斯公式来计算$\iint\limits_{\Gamma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，记$\sigma_1$为平面$z=0$上满足$x^2+y^2 \leqslant 1$部分的下侧，则$\Gamma_1 + \sigma_1$构成封闭曲面，其所包围的区域记为$\Omega$，则

$$\oiint\limits_{\Gamma_2+\sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v = 2\pi$$

而$\iint\limits_{\sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$

最后有$I = \iint\limits_{\Gamma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Gamma_2+\sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi$

注意　本题中Γ既可取为上半单位曲面，也可取为以原点为球心，以r为半径的上半球面，只需使Γ被包含在S内即可。本题的结论还表明它与球面S的具体形式是无关的，当然需S是不经过原点的分片光滑曲面($z \geqslant 0$)。

例 15　计算积分$\iint\limits_{S} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中

式中S为圆锥曲面$x^2+y^2=z^2\,[0 \leqslant z \leqslant h]$的一部分，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为此曲面外法线的方向余弦。

提示　合并平面$z=h,\ x^2+y^2 \leqslant h^2$的部分。

解　根据提示，设平面区域$z=h,\ x^2+y^2 \leqslant h^2$的上侧称为$S_1$，将此和曲面$S$合并，得封闭曲面$S+S_1$的外侧。用高斯公式得到

$$\iint\limits_{S+S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= 2\iiint\limits_{V} (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中V是由锥面$x^2+y^2=z^2$和平面$z=h$所围的区域。由于

$$\iint\limits_{S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2} z^2\Big|_{z=h} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = h^2\pi\, h^2 = \pi\, h^4$$

$$\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\iiint\limits_V y\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2} y\mathrm{d}z\mathrm{d}y = 0$$

$$\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^h z\pi\, z^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}h^4$$

从而得到 $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$

$$= 2\times\frac{\pi}{4}h^4 - \pi\, h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4$$

例 16 设空间曲线 C 由立方体：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面与平面 $x+y+z=3/2$ 相截而成，试计算

$\left|\oint\limits_C (z^2-y^2)\mathrm{d}x + (x^2-z^2)\mathrm{d}y + (y^2-x^2)\mathrm{d}z\right|$。

分析 空间闭曲线上的曲线积分可以分段直接化为定积分计算，并注意运用对称性来简化计算，或可以考虑用斯托克斯公式计算（见图 6-9）。

解法 1 直接进行计算。

对于 $\oint\limits_C (z^2-y^2)\mathrm{d}x + (x^2-z^2)\mathrm{d}y + (y^2-x^2)\mathrm{d}z$，

$$\int\limits_{C_1} = \int\limits_{\overline{AB}} = \int_1^{\frac{1}{2}} [0-(\frac{3}{2}-x)^2]\mathrm{d}x + (x^2-0)\mathrm{d}(\frac{3}{2}-x)$$

（在 xOy 平面上，$\overline{AB}$ 的方程为 $y=\frac{3}{2}-x$，点 A、B 各对应的横坐标为 1，1/2）

$$= \int_1^{\frac{1}{2}} (\frac{9}{4} - 3x - 2x^2)\mathrm{d}x = \frac{7}{12}$$

$$\int\limits_{C_4} = \int\limits_{\overline{DE}} = \int_0^{\frac{1}{2}} [1-(\frac{1}{2}-x)^2]\mathrm{d}x + (x^2-1)\mathrm{d}(\frac{1}{2}-x)$$

（在平面 $z=1$ 上，$\overline{DE}$ 的方程为 $y=\frac{1}{2}-x$，点 D、E 各对应的横坐标为 0，1/2）

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{7}{4}+x-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{11}{12}$$

由对称性可知，$|\oint_C|=3|\int_{C_1}+\int_{C_4}|=3(\frac{7}{12}+\frac{11}{12})=\frac{9}{2}$

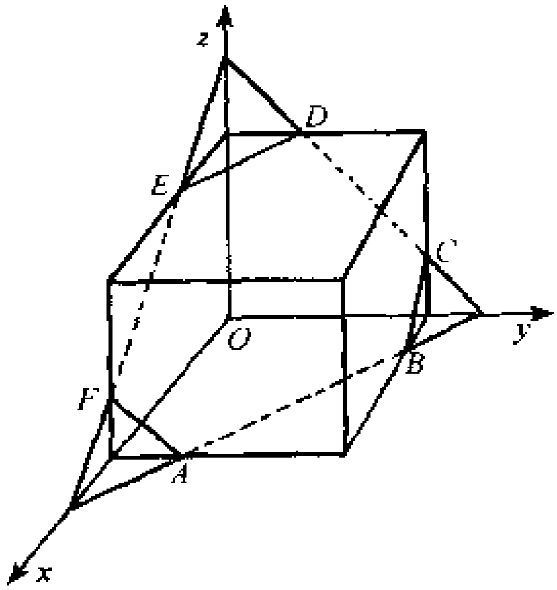


图 6-9

解法 2 选取平面 $x+y+z=3/2$ 上被折线 C 所包围的朝上侧的部分作为张于曲线 C 上的曲面 S。它的法向量 $n=\{1,1,1\}$ 的方向余弦为 $\cos(n,i)=\cos(n,j)=\cos(n,k)=1\big/\sqrt{1^2+1^2+1^2}=1\big/\sqrt{3}$

设 D_{xy} 表示曲面 S 在坐标平面 xOy 上的投影区域，其面积为

$$A=|x|-2(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$$

由斯托克斯公式

$$\oint_C(z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos(n,i)+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos(n,j)+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos(n,k)]\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S [2y-(-2z))\frac{1}{\sqrt{3}}+(2z-(-2x))\frac{1}{\sqrt{3}}\ (2x-(-2y))\frac{1}{\sqrt{3}}]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S \frac{3}{2}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{6}{\sqrt{3}}\iint_S \mathrm{d}S=2\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\cos(n,k)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（由 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos(n,k)\mathrm{d}S$，知 $\mathrm{d}S=\dfrac{1}{\cos(n,k)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$）

$$=2\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6A=\frac{9}{2}$$

故 $\left|\oint_C (z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z\right|=\dfrac{9}{2}$

例 17 计算 $I=\oint_L x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z$，其中，$L$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=5$ 与旋转抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 的交线，从 Oz 轴正方向看去为顺时针。

分析 计算空间的简单封闭曲线的积分，一般有如下三种方法：①直接化为对参数 t 的定积分计算，此时需将 L 用参数方程表示。②利用斯托克斯公式将封闭的曲线积分转化为绷在 L 上的曲面。③将空间曲线 L 投影到某个坐标面上去，转化为平面上曲线 L^* 的积分，再用格林公式。

解法 1 曲线 L 可表示成 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2\end{cases}$，由斯托克斯公式

$$I=\iint_{\Sigma_1}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2yz & x^2+y^2 & x+y+1\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma_1}(1-0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(2x-2x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}x^2 dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}$$

解法 2 将 L 表示成参数方程 $x=\cos t$， $y=\sin t$， $z=2$ 于是

$$I=\oint_L x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{2\pi}^{0}[\cos^2 t\sin t\cdot 2(-\sin t)+(\cos^2 t+\sin^2 t)\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}2\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=8[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(1-\frac{3}{4})]=\frac{\pi}{2}$$

解法 3 曲线 L 在 xOy 面上的投影 L^*： $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$

$$I=\oint_L x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z$$

$$=\oint_L x^2y\cdot 2\mathrm{d}x+(x^2+y^2)dy$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(2x-2x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}$$

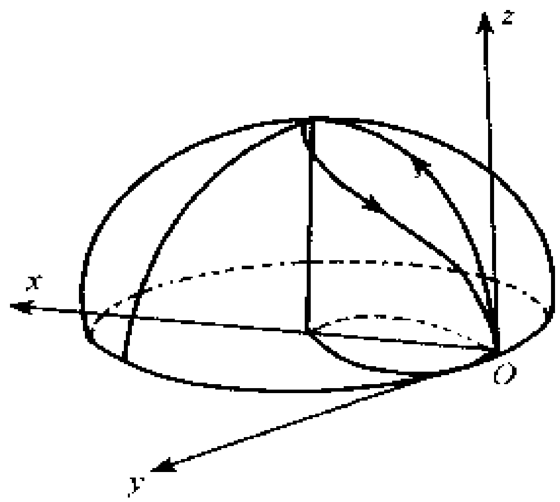


图 6-10

例 18 计算 $\oint_C(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=2Rx$， $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R,z>0)$ 的交线，此曲线方向是如下进行的，由它所包围在球 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 外表面上最小区域保持在左方（见图 6-10）。

解 用斯托克斯公式后得

$$\oint_C(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_S[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 上由 C 所围的区域。

由于 $\cos\alpha$，$\cos\beta,\cos\gamma$ 为球面的外法线方向余弦，故

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R}，\quad \cos\beta=\frac{y}{R}，\quad \cos\gamma=\frac{z}{R}$$

从而得到 $\oint_C(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$

$$=2\iint_S[(y-z)\frac{x-R}{R}+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}]\mathrm{d}S$$

由于曲面 S 关于 xOz 坐标面对称，故 $\iint_S y\mathrm{d}S=0$。

又因在球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 上，

$$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{1+\frac{(x-R)^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{R}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故有 $\oint_C(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$

$$=2\iint_S z\cdot\frac{R}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2R\iint_S\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi Rr^2$$

显然也可以直接计算这个积分。先将曲线 C 写成参数方程的形式。

由 $x^2+y^2=2rx$ 得 $(x-r)^2+y^2=r^2$。令

$$x-r=r\cos t，\quad y=r\sin t$$

将此代入球面方程 $x^2+y^2+z^2=2Rx$，即得曲线 C 的参数方程为 $x=r(1+\cos t)$，$y=r\sin t$，$z=\sqrt{2r(R-r)}\sqrt{1+\cos t}$，

当 t 从 0 到 2π 时描出曲线的正向。由此得

$$\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\{[r^2\sin^2 t+2r(R-r)(1+\cos t)](-r\sin t)+$$

$$[2r(R-r)(1+\cos t)+r^2(1+\cos t)^2]r\cos t+$$

$$[r^2(1+\cos t)^2+r^2\sin^2 t]\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r(R-r)}{1+\cos t}}(-\sin t)\}\mathrm{d}t$$

由于 $\int_0^{2\pi}[r^2\sin^2 t+2r(R-r)(1+\cos t)](-r\sin t)\mathrm{d}t$

$$=r^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)\mathrm{d}(\cos t)+2r^2(R-r)\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\mathrm{d}(\cos t)=0$$

$$\int_0^{2\pi}[2r(R-r)(1+\cos t)+r^2(1+\cos t)^2]r\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2r^2(R-r)\int_0^{2\pi}(\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t\quad\cdot$$

$$r^3\int_0^{2\pi}(1+2\cos t+\cos^2 t)\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2r^2(R-r)\pi+r^3 2\pi=2\pi Rr^2$$

以及

$$\int_0^{2\pi}[r^2(1+\cos t)^2+r^2\sin^2 t]\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r(R-r)}{1+\cos t}}(-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=r^2\sqrt{\frac{r(R-r)}{2}}[\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^{3/2}\mathrm{d}(\cos t)+\int_0^{2\pi}\frac{(1-\cos^2 t)}{\sqrt{1+\cos t}}\mathrm{d}(\cos t)]$$

$$=r^2\sqrt{\frac{r(R-r)}{2}}[\int_0^{\pi}(1+\cos t)^{3/2}\mathrm{d}(\cos t)+\int_{\pi}^{2\pi}(1+\cos t)^{3/2}\mathrm{d}(\cos t)+$$

$$\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sqrt{1+\cos t}\mathrm{d}(\cos t)+\int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1+\cos t}\mathrm{d}(\cos t)]$$

$$=r^2\sqrt{\frac{r(R-r)}{2}}[\int_1^{1}(1+u)^{3/2}\mathrm{d}u+\int_{-1}^{1}(1+u)^{3/2}\mathrm{d}u+$$

$$\int_1^{1}(1-u)\sqrt{1+u}\mathrm{d}u+\int_{-1}^{1}(1-u)\sqrt{1+u}\mathrm{d}u]$$

$$=0$$

从而得到

$$\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=2\pi Rr^2$$

6.3 自测题及提示

6.3.1 自测题

1．计算$\int_C y^2\mathrm{d}s$，其中C为摆线$x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$的一拱。

2．$\oint_{OmAnO}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$，其中$OmA$为抛物线段$y=x^2$， OnA为直线段$y=x$。

3．计算$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})\mathrm{d}x+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})\mathrm{d}y$沿着不与$Oy$轴相交的路径。

4．计算曲线积分$\int_{AmO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)dx+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中$AmO$为由点$A(a,0)$至点$O(0,0)$的上半圆周。

5．计算$\int_L x^2\mathrm{d}s$，其中L： $x^2+y^2+z^2=a^2$， $x+y+z=0$。

6．计算曲线积分$\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$。其中$L$是曲线

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,\quad x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$$

$(a>0,b>0,c>0$为常数）从点$(a,0,0)$到$(0,0,c)$。

7．设L表示平面上一条自身不相交的光滑曲线。其起点在$(1,0)$，终点在$(0,2)$。除起终点外，L全部落在第一象限。计算积分$\int_L\frac{\partial\ln r}{\partial n}\mathrm{d}s$，这里$\frac{\partial}{\partial n}$表示沿$L$的法线方向取导数，法线指向原点所在的那一侧；$r$表示$L$上的变动点到原点的距离，$\mathrm{d}s$表示$L$的弧长微分。

8．计算积分$I=\iint\limits_S z\mathrm{d}s$，其中$S$是曲面$x^2+z^2=2az$ $(a>0)$被曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所截取的有限部分。

9．设$f(x)$连续，证明普阿松公式

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}f(a\sin\varphi\cos\theta+b\sin\varphi\sin\theta+c\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$=2\pi\int_{-1}^{1}f(kz)\mathrm{d}z$，$(k=\sqrt{a^2+b^2+c^2})$。

10．设S^+为$z-c=\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$的上侧，试计算积分$I=\iint\limits_{S^-}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

6.3.2 自测题提示

1．这是第一类型曲线积分，用参数方程化为定积分直接计算。

2．曲线由两部分组成，分别积分后相加即可。

3．$P=1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}$，$Q=\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$故知$(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x})\mathrm{d}x+(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x})\mathrm{d}y$为全微分。取积分途径为由$(1,\pi)$到$(2,\pi)$的直线段，其方程为$y=\pi$ $(1\leqslant x\leqslant 2)$。

4．用Ox轴的直线段OA接合路径AmO使成封闭的，再利用格林公式进行计算。

5．可以利用对称性进行计算。

6．利用坐标面上的投影椭圆的参数方程，或者在截平面上引进极坐标。

7．先证明积分与路径无关，再选平行坐标轴的折线积分。

8．积分等于第一卦限积分的4倍，将位于第一卦限的曲面向yz平面投影。

9．先进行坐标旋转，再用柱坐标进行计算。

10．用参数方程$x=a+R\sin\varphi\cos\theta$，$y=b+R\sin\varphi\sin\theta$，$z=c+R\cos\varphi$进行计算。

第7章 级 数

7.1 内容提要

本章内容包括判断级数的敛散性；求级数的收敛半径、收敛域；求级数的和函数；级数敛散性的证明。其中级数证明题是本章重点。

7.2 例题解析

例1 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$的敛散性。

解 记$u_n=\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$，则$u_n=(1+\frac{x}{n})^n\frac{1}{n^x}$，当$n$充分大时$u_n>0$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$可认为是正项级数，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$为$p-$级数。$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^x=e^x$，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$有相同的敛散性。故当$x\leqslant 1$时，原级数发散；当$x>1$时，原级数收敛。

例2 求下列级数的收敛域及和函数。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}(x-1)^n}{n+1}$

解 （1）$\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-x})^n$，为一个等比级数，只要$|e^{-x}|<1\Rightarrow x>0$，则原级数收敛，且

$$S(x)=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-x})^n=\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{x^2}{e^x-1}\qquad(x>0),$$另外$x=0$时，

$S(0)=0$，故收敛域为$x\geqslant 0$。

（2）令 $e^{-x}=t$，原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$，$\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{(n+1)}{n}|=1$，则收敛半径 $R=1/\rho=1$，当 $t=e^{-x}<1$，即 $x>0$ 时，原级数收敛；当 $t=1$，即 $x=0$ 时，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}n$，显然发散。故原级数的收敛域为 $x>0$。

记 $F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$，则 $\int\frac{F(t)}{t}=\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{t}{1-t}$，所以

$F(t)=t(\frac{t}{1-t})'_t=\frac{t}{(1-t)^2}$，因此原级数的和函数 $S(x)=\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$

（3）令 $t=e^x(x-1)$，原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}$，易知收敛半径 $R=1$，当 $t=1$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，发散；当 $t=-1$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$，为一收敛的交错级数。故收敛域为 $-1\leqslant t<1$ 或 $\{x|-1\leqslant e^x(x-1)<1\}$

记 $F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}$，则 $(tF(t))'_t=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1})'_t=\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{t}{1-t}$

所以 $tF(t)=\int\frac{t}{1-t}dt=-t-\ln(1-t)+c$，令 $t=0$ 得 $c=0$，故 $F(t)=-\frac{\ln(1-t)}{t}-1$

所以原级数的和函数为 $S(x)=-\frac{\ln[1-e^x(x-1)]}{e^x(x-1)}-1\quad x\in\{x|-1\leqslant e^x(x-1)<1\}$，且 $S(1)=0$

例 3 设数列 $\{a_n\}$，$a_0=4$，$a_1=1$；$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$（$n\geqslant2$），求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数。

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho^2$，另外由条件得 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}=0$，所以 $\rho=0$，从而 $R=+\infty$，即收敛域为 $x\in(-\infty,+\infty)$。记和函数为 $S(x)$，则

$S(x)=a_0+a_1x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^n$，$S(0)=a_0=4$，$S'(0)=a_1=1$，

$S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$，即

$S''(x)-S(x)=0$

解此微分方程得 $S(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$，结合 $S(0)=4$，$S'(0)=1$ 得 $c_1=\dfrac{5}{2}$，$c_2=\dfrac{3}{2}$

因此所求和函数为 $S(x)=\dfrac{5}{2}e^x+\dfrac{3}{2}e^{-x}\qquad x\in R$

例 4 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛，证明当 $a_0=a_1=0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 收敛。

证明 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛，故 $f(1)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛，依级数收敛的必要条件得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，因而 $\{a_n\}$ 有界，即 $\exists M$，$|a_n|\leqslant M$，$\forall n\in N$，故 $|f(\dfrac{1}{n})|\leqslant\dfrac{|a_2|}{n^2}+\dfrac{|a_3|}{n^3}+\cdots\leqslant\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{M}{n^k}=\dfrac{M}{n(n-1)}$

由正项级数的比较审敛法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(\dfrac{1}{n})|$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 收敛。　证完

例 5 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}\cos^3 3^n x$ 的和函数。

分析 本题不宜用求导或积分方法求和函数。但通过观察，猜测用三倍角公式，通过正负项抵消而得到和函数。

解 易知该级数的定义域为 $x\in R$

由三倍角公式$\cos^3\theta=\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos3\theta$，得

$$\cos^3 3^n x=\frac{3}{4}\cos 3^n x+\frac{1}{4}\cos 3^{n+1}x$$

则$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}\cos^3 3^n x$

$$=\frac{1}{4}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n-1}}\cos 3^n x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}\cos 3^{n+1}x]$$

$$=\frac{1}{4}[3\cos x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n-1}}\cos 3^n x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}\cos 3^{n+1}x]$$

$$=\frac{3\cos x}{4}$$

例 6　$\{a_n\}$为正数列，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，记部分和$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，证明（1）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散；（2）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}$ $(\sigma>0)$

证明　（1）**方法 1**　记$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k}$，由于$S_n\to+\infty$（当$n\to\infty$时），故任意固定$n$，存在$p\in N$，使$\frac{S_n}{S_{n+p}}<\frac{1}{2}$，这样，

$$B_{n+p}-B_n=\sum_{k=1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k}=\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}$$

$$\geqslant\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}}{S_{n+p}}=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

因此$|B_{n+p}-B_n|$不能任意的小，由 Cauchy 审敛原理知$\lim_{n\to\infty}B_n$不存在，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散。

方法 2　只要证明正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$（或$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{S_{n-1}}{S_n})$）的部分和$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k}=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{S_{k-1}}{S_k})$（设$S_0>0$）无界即可。

$B_n=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{S_{k-1}}{S_k})=n-(\frac{S_0}{S_1}+\frac{S_1}{S_2}+\cdots+\frac{S_{n-1}}{S_n})\quad\leqslant\quad n-n\sqrt[n]{\frac{S_0}{S_1}\frac{S_1}{S_2}\cdots\frac{S_{n-1}}{S_n}}$

$=n-n\sqrt[n]{\frac{S_0}{S_n}}$，整理得

$$S_0\leqslant(1-\frac{B_n}{n})^n S_n \tag{7-1}$$

由式（7-1）分析不出 B_n 的有界性，原因是 B_n 与 S_n 在不等式的同侧，这启发我们研究另外一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{S_n}{S_{n-1}}-1)$。记其部分和为

$B_n^*=\sum_{k=1}^{n}(\frac{S_k}{S_{k-1}}-1)$

证 $B_n^*=(\frac{S_1}{S_0}+\frac{S_2}{S_1}+\cdots+\frac{S_n}{S_{n-1}})-n\geqslant n\sqrt[n]{\frac{S_n}{S_0}}-n$，整理得 $S_n\leqslant$ $(1+\frac{B_n^*}{n})^n S_0\leqslant S_0e^{B_n^*}$

由 $S_n\to+\infty$ 得 B_n^* 无界，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{S_n}{S_{n-1}}-1)$ 发散。

余下的关键问题是：$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{S_{n-1}}{S_n})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{S_n}{S_{n-1}}-1)$ 是否具有相同的敛散性？

（i）$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}\neq0$（这是可能的。例如，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=a_1=1$，$a_2=a_0+a_1$，…，$a_n=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$ 此时有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{1}{2}\neq0$）

在此情况下，由级数收敛的必要条件知道 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散。

（ii）$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=0$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{S_n}{S_{n-1}}-1}{1-\frac{S_{n-1}}{S_n}}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{a_n}{S_n})=1$，由比较审敛法知道 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{S_n}{S_{n-1}}-1)$ 有相同的敛散性。由上述证明知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发

散。

方法 3 原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}$，出现了差的形式（$S_n-S_{n-1}$），一般说来，可以运用微分或积分中值公式。引入函数$f(x)=\frac{1}{x}$，则有$\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$，另外，依据积分中值公式得$\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x}dx=\frac{S_n-S_{n-1}}{\xi_n}$ $\leqslant\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}$，即$\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}\geqslant\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$所以

$\sum_{n=1}^{N}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}=\ln\frac{S_N}{S_0}\to+\infty$（$N\to\infty$ 时）从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}$发散。

由方法 2 知道$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}$也发散。

（2）**方法 1** 原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{1+\delta}}$（令$S_0>0$），引入函数$f(x)=\frac{1}{x^{1+\sigma}}$，则$\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^{1+\sigma}}dx=\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{S_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{S_n^{\sigma}})$，另由积分中值公式

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^{1+\sigma}}dx=\frac{S_n-S_{n-1}}{\xi_n^{1+\sigma}}\geqslant\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{1+\sigma}}$$

从而$\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{1+\sigma}}\leqslant\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{S_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{S_n^{\sigma}})$，因此

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{1+\sigma}}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{S_{n-1}^{\sigma}}-\frac{1}{S_n^{\sigma}})=\frac{1}{\sigma S_0^{\sigma}}$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{1+\delta}}$的部分和有界。故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}$收敛。 证完。

方法 2 （i）$\sigma=1$时，

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_kS_{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k})=\frac{1}{S_0}-\frac{1}{S_n}\leqslant$$

$\frac{1}{S_0}$，即级数部分和有界，故原级数收敛。

（ii）$\sigma>1$时，由比较审敛法得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}$收敛。

（iii）$0<\sigma<1$时，分两种情况(a),(b)讨论。

（a）$\sigma\in Q^+$时，令$\sigma=\frac{p}{q}$，$(p,q)=1$，则$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k^{1+\frac{p}{q}}}$（令$S_k^{\frac{q+p}{p}}=H_k^{q+p}$）

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k^q-H_{k-1}^q}{H_k^{p+q}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(H_k-H_{k-1})(H_k^{q-1}+H_k^{q-2}H_{k-1}^1+\cdots+H_{k-1}^{q-1})}{H_k^{q+p}}\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(H_k-H_{k-1})qH_k^{q-1}}{H_k^{q+p}}=q\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k-H_{k-1}}{H_k^{p+1}}\leqslant q\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k-H_{k-1}}{H_kH_{k-1}}\leqslant\frac{q}{H_0}$$

故部分和有界，因此当$\sigma\in Q^+$时，原级数收敛。

（b）当$\sigma\in\overline{Q}$时，$\exists\{\sigma_m\mid\sigma_m=\frac{p_m}{q_m},(p_m,q_m)=1\}\subset Q^+$且$\{\sigma_m\}\uparrow$，$\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=\sigma$，取$\sigma_{m_0}\in\{\sigma_m\}$，有$\sigma>\sigma_{m_0}$，所以$S_n^{1+\sigma}>S_n^{1+\sigma_{m_0}}$，则有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma_{m_0}}}$，右边的级数由上面的$(a)$小节知收敛，因此由比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}$收敛。

综合(i),(ii),(iii)有当$\sigma>0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{1+\sigma}}$收敛。　　证完

评注（1）正项级数收敛的充要条件是部分和有界，此结论经常用到。

（2）Cauchy 审敛原理在证明数列及级数敛散性方面是一个重要的方法。

（3）从自然数到有理数（分数）到实数逐次逼近是一种重要的数学方法。

（4）在解题时，若遇到“差”形式，一般考虑微分（大部分情况下）或积分中值公式。

例 7 正项数列 $\{a_n | a_n \geqslant 1, \forall n \in N\}$ 单调上升。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}$ 收敛。

证明 令 $\sqrt{a_n}=u_n$，则原级数部分和化为 $B_n=\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{u_k^2}{u_{k+1}^2})\frac{1}{u_{k+1}}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}^2-u_k^2}{u_{k+1}^3}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(u_{k+1}-u_k)(u_{k+1}+u_k)}{u_{k+1}^3} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{2u_{k+1}(u_{k+1}-u_k)}{u_{k+1}^3} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}-u_k}{u_{k+1}^2} \leqslant$$

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}-u_k}{u_{k+1}u_k}=2(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}})<\frac{2}{u_1}$$

即原级数的部分和 B_n 有界，故原正项级数收敛。证完

例 8 证明当 $p\geqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p$（前苏联数学竞赛题）

证明 （1）当 $p=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}=1=p$，故命题成立。

（2）当 $p>1$ 且 $p\in N$ 时，令 $a_n=\sqrt[p]{n}$，则原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}^p-a_n^p}{a_{n+1}^p a_n}$$

其部分和

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}^p-a_k^p}{a_{k+1}^p a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}^{p-1}+a_{k+1}^{p-2}a_k+\cdots+a_k^{p-1})}{a_{k+1}^p a_k}<$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{pa_{k+1}^{p-1}(a_{k+1}-a_k)}{a_{k+1}^p a_k}=p\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}a_k}=p(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}})<\frac{p}{a_1}=p$$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p$$

（3）当 $p>1$ 且 $p\in R^+$ 时，$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}^p-a_k^p}{a_{k+1}^p a_k}=$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{p\xi_k^{p-1}(a_{k+1}-a_k)}{a_{k+1}^{p}a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{pa_{k+1}^{p-1}(a_{k+1}-a_k)}{a_{k+1}^{p}a_k}=p\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}a_k}<p$$

综合（1）、（2）、（3）有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}\leqslant p \qquad (p\geqslant 1)$证完

评注 原题目为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$，$(P\geqslant 1)$。但当$p=1$时就不妥当。

例 9 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$收敛，则级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^2}p_n$收敛。

证明 记$q_n=p_1+p_2+\cdots+p_n$，则原级数部分和可表为

$$B_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2(q_n-q_{n-1})}{q_n^2}\ (q_0=0)\leqslant\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2(q_n-q_{n-1})}{q_nq_{n-1}}+\frac{1}{p_1}$$

$$=\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_{n-1}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n}+\frac{1}{p_1}=\sum_{n=2}^{N}\frac{(n-1)^2+2(n-1)+1}{q_{n-1}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n}+\frac{1}{p_1}$$

$$=\sum_{n=2}^{N}\frac{(n-1)^2}{q_{n-1}}+2\sum_{n=2}^{N}\frac{n-1}{q_{n-1}}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{q_{n-1}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n}+\frac{1}{p_1}$$

$$=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n^2}{q_n}+2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n}{q_n}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{q_n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n}+\frac{1}{p_1}$$

$$=\frac{1}{q_1}-\frac{N^2}{q_N}+2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n}{q_n}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{q_n}+\frac{1}{p_1}\leqslant\frac{2}{p_1}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{q_n}+2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n}{q_n}$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$为正项收敛级数，故有界，设界为$T$，则

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}\leqslant T$，故有

$B_N\leqslant\frac{2}{p_1}+T+2\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{n}{q_n}$，而

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{q_n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{q_n}\sqrt{p_n}\frac{1}{\sqrt{p_n}}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n\sqrt{p_n}}{q_n}\right)^2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{p_n}}\right)^2}$$

$=\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{q_n^2}p_n\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_n}}\leqslant\sqrt{B_NT}$，故 $B_N\leqslant\frac{2}{p_1}+T+2\sqrt{B_NT}$，整理得 $B_N\leqslant(\sqrt{T}+\sqrt{2(T+\frac{1}{p_1})})^2$ 即部分和有界，故原级数收敛。

评注 （1）不等式在证明级数敛散性方面起着关键作用。

（2）简记法能起到化繁为简，表达清晰，理顺问题内部规律的作用。

例 10 设 $\{a_n\}$ 为一个数列，令 $\overline{a}_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，若 $\{\overline{a}_n\}$ 为有界列，则对任意的 $\sigma>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{1+\sigma}}$ 收敛。

证明 $n\overline{a}_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$(n-1)\overline{a}_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ （令 $\overline{a}_0=0$），则

$n\overline{a}_n-(n-1)\overline{a}_{n-1}=a_n$，即 $a_n=n(\overline{a}_n-\overline{a}_{n-1})+\overline{a}_{n-1}$

因此原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\overline{a}_n-\overline{a}_{n-1})+\overline{a}_{n-1}}{n^{1+\sigma}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a}_n-\overline{a}_{n-1}}{n^{\sigma}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a}_{n-1}}{n^{1+\sigma}}$

由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a}_{n-1}}{n^{1+\sigma}}$ 绝对收敛；由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a}_n-\overline{a}_{n-1}}{n^{\sigma}}$ 收敛。故原级数收敛。

例 11 正项数列 $\{a_n\}$ 单调增加，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛 $\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛。

证明 （1）$\Rightarrow$：$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\geqslant\frac{n}{na_n}=\frac{1}{a_n}$，由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛。

（2）$\Leftarrow$：因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}$ 收敛，

结合$\dfrac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}} \geqslant \dfrac{2n}{2na_{2n}} = \dfrac{1}{a_{2n}} \geqslant \dfrac{1}{a_{2n+1}}$得

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{2n}}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{2n+1}}$均收敛。而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{2n}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{2n+1}}$因此也收敛。证完

例 12 与欧拉(Euler)公式有关的级数问题

（1）欧拉公式：$H_n=\ln n+c+\varepsilon_n$的推导。其中$H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$，$c=0.5771\cdots$，$\varepsilon_n\to 0$

解 令$z_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$

由$(1+\dfrac{1}{n})^n<e<(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$得$\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$

利用上述不等式的左端：$z_n-z_{n+1}=\ln(n+1)-\ln n-\dfrac{1}{n+1}=\ln(1+\dfrac{1}{n})-\dfrac{1}{n+1}>0$所以$\{z_n\}$单调下降。利用上述不等式的右端

$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\dfrac{1}{k})=\ln(n+1)>\ln n$，得$z_n>0$，即$\{z_n\}$有下界。从而数列$\{z_n\}$有极限，记$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$，则

$$\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n)=c \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n-c)=0$$

因此有$H_n-\ln n-c=\varepsilon_n$（当$n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to 0$）即

$H_n=\ln n+c+\varepsilon_n$，此为著名的欧拉公式。

（2）求证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$收敛，并求其和。

证明 原级数改为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n+c+\varepsilon_n}{(n+1)(n+2)}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$（1<p<2）比较知原级数收敛。原级数部分和

$$B_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n}{n+2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{N}\frac{H_{n+1}-\frac{1}{n+1}}{n+2}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{H_n}{n+1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n}{n+1}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{H_n}{n+1}+$$

$$\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$$

$$=\frac{H_1}{2}-\frac{H_{N+1}}{N+2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}=1-\frac{1}{N+2}(1+H_{N+1})$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}=\lim_{N\to\infty}B_N=1$

评注 裂项、配项法是数学中常用方法，应引起足够重视。

（3）求积分$\int_0^1(\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}])\mathrm{d}x$。

解 $I=\int_0^1(\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}])\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}])\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}])\mathrm{d}x+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}(\frac{1}{x}-n)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$I_N=\sum_{n=1}^{N}(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1})=\ln(N+1)-H_{N+1}+1$$

所以 $I=\lim_{N\to\infty}I_N=\lim_{N\to\infty}(\ln(N+1)-H_{N+1}+1)=1-c$

例 13 设 $a_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$。$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，证明

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)<\sum_{k=0}^{n}\frac{S_n^k}{k!}$$

证明 记$A=\mathrm{e}^{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\mathrm{e}^{a_1}\mathrm{e}^{a_2}\cdots\mathrm{e}^{a_n}$

$$=(1+a_1+\frac{1}{2!}a_1^2+\cdots)(1+a_2+\frac{1}{2!}a_2^2+\cdots)\cdots(1+a_n+\frac{1}{2!}a_n^2+\cdots)$$

$B=\mathrm{e}^{S_n}=1+S_n+\frac{1}{2!}S_n^2+\cdots+\frac{1}{n!}S_n^n+\cdots$ 显然 $A\equiv B$

称不含 a_k^m（$k=1,2,\cdots,n;m\geqslant 2$）因子的项为一次项。则 $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ 是由 A 的全部一次项构成；而 $\sum_{k=0}^{n}\frac{S_n^k}{k!}$ 是由 B 的全部一次项

及部分非一次项构成，这是因为

$$B-\sum_{k=0}^{n}\frac{S_n^k}{k!}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{S_n^k}{k!}=\frac{S_n^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{S_n^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots,$$

$S_n^{n+1}=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{n+1}$，由抽屉原理知 S_n^{n+1} 中不含一次项，易知 S_n^{n+2}，$S_n^{n+3},\cdots$ 中更不可能含有一次项，即 $B-\sum_{k=0}^{n}\frac{S_n^k}{k!}$ 中不含一次项，换言之，一次项均含于 $\sum_{k=0}^{n}\frac{S_n^k}{k!}$ 之中，又显见 $\sum_{k=0}^{n}\frac{S_n^k}{k!}$ 中含有非一次项，故有

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)<\sum_{k=0}^{n}\frac{S_n^k}{k!}$$ 证完

例 14 设 $f_0(x)=e^x$，$f_{m+1}(x)=xf_m'(x)$，$m=0,1,2,\cdots$。证明 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m(1)}{m!}=e^e$。

证明 $f_0(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，

$$f_1(x)=xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}$$

$f_2(x)=xf_1'(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}$，运用数学归纳法得

$$f_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^m x^n}{n!}$$

所以 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m(1)}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^m}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^m}{m!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!}=e^e$ 证完

例 15 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-S_nx}$ 的收敛域。

解 （1）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\exists M$，$\forall n\in N$，有 S_n，任给 $x\leqslant M$，

固定 x，则 $0 < a_n e^{-S_n x} \leqslant a_n e^{S_n|x|} \leqslant a_n e^{M|x|}$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{M|x|}$，$x \in R$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$ 收敛。此时的收敛域为 $x \in (-\infty,+\infty)$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$S_n \to +\infty$（当 $n \to \infty$ 时）

当 $x \leqslant 0$ 时，$a_n e^{-S_n x} \geqslant a_n$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$ 发散。

当 $x > 0$ 时，$\int_{S_{n-1}}^{S_n} e^{-tx} dt = e^{-\xi_n x}(S_n - S_{n-1}) = a_n e^{-\xi_n x} \geqslant a_n e^{-S_n x}$，即 $a_n e^{-S_n x} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} e^{-tx} dt$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} e^{-tx} dt =$（令 $S_0 = 0$）$\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$ 此积分为一正常数，故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-S_n x}$ 收敛。此时的收敛域为 $x \in (0,+\infty)$

例 16 已知数列 $\{a_n\}$ 单调下降趋于 0，且

$b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0\ (\forall n \in N)$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n = a_1$。

证明 $S_n = \sum_{k=1}^{n} kb_k = a_1 - a_{n+1} - n(a_{n+1} - a_{n+2}) \leqslant a_1$，有界，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n = a_1 - \lim_{n\to+\infty} n(a_{n+1} - a_{n+2})$，下证 $\lim_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_{n+2}) = 0$，否则假设 $\lim_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_{n+2}) = c > 0$，取 $\varepsilon = \frac{c}{2}$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有 $n(a_{n+1} - a_{n+2}) > c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$

即 $a_{n+1} - a_{n+2} > \frac{c}{2n}$，所以 $\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_{n+1} - a_{n+2}) \geqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{c}{2n}$，从而级数

$\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_{n+1}-a_{n+2})$ 发散；但 $\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_{n+1}-a_{n+2})$ 的部分和

$\sum_{n=N+1}^{M}(a_{n+1}-a_{n+2})=a_{N+1}-a_{M+2}\leqslant a_{N+1}$ 有界，故级数

$\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_{n+1}-a_{n+2})$ 收敛。从而导致矛盾。

所以 $\lim_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_{n+2})=0$

因此有 $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n = a_1$　证完

例 17　若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，数列 $\{a_n\}$ 单调下降，则 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$。

证明　记 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$，因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N_\varepsilon$ 及任意自然数 p，有

$$|S_{N+p}-S_N|=a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+p}<\frac{\varepsilon}{2}$$

又因为数列 $\{a_n\}$ 单调下降，故

$$pa_{N+p}\leqslant a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+p}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{7-2}$$

由级数收敛的必要条件得 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$，对上述 N（固定），有 $\lim_{p\to\infty} a_{N+p}=0$

因此对上述 ε，$\exists P$，当 $p>P$ 时，有 $a_{N+p}<\dfrac{\varepsilon}{2N}$　　（7-3）

从而结合式（7-2）、式（7-3）得

$(N+p)a_{N+p}=Na_{N+p}+pa_{N+p}<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

令 $N_0=N+P$，则当 $n>N_0$ 时，有 $na_n<\varepsilon$

因此 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$　证完

例 18 证明 $s\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{1+s}}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ （ $s>1$ ）。

证明 $B=s\int_1^{+\infty}\frac{[x]}{x^{1+s}}\mathrm{d}x=s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{[x]}{x^{1+s}}\mathrm{d}x=s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{n}{x^{1+s}}\mathrm{d}x$

$$=s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{-s}[\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{n^s}]=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n^{s-1}}-\frac{n}{(n+1)^s}]$$

令 $B_N=\sum_{n=1}^{N}[\frac{1}{n^{s-1}}-\frac{n}{(n+1)^s}]=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{s-1}}-\sum_{n=1}^{N}\frac{n+1}{(n+1)^s}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^s}$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{s-1}}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^{s-1}}+\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^s}=1-\frac{1}{(N+1)^{s-1}}+\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(N+1)^{s-1}}$$

所以 $B=\lim_{N\to\infty}B_N=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ ，故命题成立。证完

例 19 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\mathrm{e}^{a_n}=a_n+\mathrm{e}^{a_n+b_n}$

（ $n=1,2,\cdots$ ）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

证明 由条件得 $\mathrm{e}^{a_n}(1-\mathrm{e}^{b_n})=a_n$ ，得

$1-\mathrm{e}^{b_n}=a_n\mathrm{e}^{-a_n}$ 所以 $b_n=\ln(1-a_n\mathrm{e}^{-a_n})$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-a_n\mathrm{e}^{-a_n})$ ，可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 为负项级数，且由比较审敛法知其敛散性与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-a_n}$ 相同，而易知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-a_n}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。证完

例 20 证明任意正有理数都可表示为调和数列 $\{1/n\}$ 中有限项之和。

证明 设有理数为 A/B ，

（1）当 $A/B=1$ 时，取 $\{1/n\}$ 中的"1"即可。

（2）当 $\frac{A}{B}>1$ 时，则由于 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，必存在 n_0 （惟一），使得

$$\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}<\frac{A}{B}\leqslant\sum_{k=1}^{n_0+1}\frac{1}{k}$$

若等号成立，即 $\frac{A}{B}=\sum_{k=1}^{n_0+1}\frac{1}{k}$，则证完；若等号不成立，则有

$\frac{A}{B}-\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}=\frac{C_1}{D_1}<\frac{1}{n_0+1}$，此处 C_1,D_1 为自然数。易知对于 $\frac{C_1}{D_1}$，可以取得惟一的 n_1（$>n_0$）

使得 $\frac{1}{n_1+1}\leqslant\frac{C_1}{D_1}<\frac{1}{n_1}$，若等号成立，则 $\frac{A}{B}=\sum_{k=1}^{n_0+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n_1+1}$，证完；若等号不成立，令

$\frac{C_2}{D_2}=\frac{C_1}{D_1}-\frac{1}{n_1+1}=\frac{C_1(n_1+1)-D_1}{D_1(n_1+1)}$（$>0$），当 $D_2=D_1(n_1+1)$ 时，

$C_2=C_1(n_1+1)-D_1<C_1$

$(\frac{C_1}{D_1}<\frac{1}{n_1}\Rightarrow C_1n_1<D_1\Rightarrow C_1n_1-D_1<0\Rightarrow C_1(n_1+1)-D_1<C_1)$ 当然当 C_2/D_2 为既约分数时，更有 $C_2<C_1$（即 C_2 变得更小）

由 $\frac{C_2}{D_2}$ 的构造知 $\frac{C_2}{D_2}<\frac{C_1}{D_1}<\frac{1}{n_1}$，故又可取 $n_2(>n_1)$，使得 $\frac{1}{n_2+1}\leqslant\frac{C_2}{D_2}<\frac{1}{n_2}$

若等号成立，则 $\frac{A}{B}=\sum_{k=1}^{n_0+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n_1+1}+\frac{1}{n_2+1}$，证完；若等号不成立，则继续上述步骤，直到 $\frac{C_m}{D_m}=\frac{C_{m-1}}{D_{m-1}}-\frac{1}{n_{m-1}+1}$，约分后 $C_m=1$ 为止。由于 C_m 在逐步减少，因此能做到这一点。

所以 $\frac{A}{B}=\sum_{k=1}^{n_0+1}\frac{1}{k}+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{n_i+1}+\frac{C_m}{D_m}$（式中或者 $C_m=1$ 或者 $\frac{C_m}{D_m}=\frac{1}{n_m+1}$）

（3）当 $0<\frac{A}{B}<1$ 时，$\frac{A}{B}=\frac{1}{B}\cdot A=\frac{1}{B}(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\cdots+\frac{1}{m_k})=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{Bm_i}$ 也能用 $\{1/n\}$ 中有限互异项之和表示。证完

附注 原题证明过程缺少（1）、（3）部分，不妥当。

7.3 自测题及提示

7.3.1 自测题

1. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，证明（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ 发散；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛。其中 S_n 为级数的部分和。

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散； $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛。

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $R_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ ，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n}$ 发散。

4. 正项数列 $\{a_n\}$ 单调增加，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 有界。

5. 正项数列 $\{H_n\}$ 单调增加，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{H_{n+1} - H_n}{H_{n+1} H_n^{\sigma}}$ （$\sigma > 0$）收敛。

6. 数列 $\{na_n\}$ 有极限，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

7. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，令 $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}}$ 收敛。

8. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和有界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^{\sigma}}$ （$\sigma > \dfrac{1}{2}$）收敛。

9. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ 收敛。

10. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性。

11. 将无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2 n + mn^2 + 2mn}$ 表示成一个有理数。

12．求下列级数的值

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$

13．证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}]$ 收敛。

14．证明（1）积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{1+s}}dx$（$s>0$）收敛；

$$（2）\int_1^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{1+s}}dx=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ (s>1)$$

15．求下列级数的收敛域

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{(3n-1)2^n}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^n$

16．求下列级数的和函数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$

7.3.2 自测题提示

1．参照例 6 证明方法

2．令 $a_n\equiv 1$，则 $S_n=n$，运用第 1 题方法。

3．记 $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则 $R_n=S-S_{n-1}$，令 $B_n=\frac{1}{R_n}$，则 $\{B_n\}$ 单调上升 $\to+\infty$；原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_{n-1}-R_n}{R_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n-B_{n-1}}{B_n}$

仿例题 6 可证明此级数发散。

4．（1）$\Leftarrow$:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_2}=\frac{a_{N+1}-a_1}{a_2}\leqslant\frac{a_{N+1}}{a_2}\leqslant\frac{M}{a_2}$$

(其中 M 是数列 $\{a_n\}$ 的界)（2）$\Rightarrow$: 参照例 6（1）题方法 2。

5．参照例 6（2）题方法 2 及例 7。

6．$B_N=\sum_{n=1}^{N}n(a_n-a_{n-1})=Na_N-\sum_{n=0}^{N-1}a_n$，因此

$\sum_{n=0}^{N-1} a_n = Na_N - B_N$，令 $N \to \infty$ 即可。

7．$B_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_N}$

$\leqslant \sqrt{R_0} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$，由正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知 B_N 有界。

8．$B_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{\sigma}} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (\sqrt{a_n})^2 \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n^{\sigma}})^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\sigma}}}$

9．提示（1）$\Rightarrow$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{a_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$，由比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 收敛。

（2）$\Leftarrow$: 运用反证法仿例 6（1）题的方法 1；或参照例 6（1）题的方法 2、3。

10．由欧拉公式得 $\frac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3^{\ln n + c + \varepsilon_n}} = \frac{1}{3^{c+\varepsilon_n}} \frac{1}{n^{\ln 3}}$，由比较审敛法知原级数与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 3}}$ 有相同的敛散性，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 3}}$ 收敛。

11．解：记 $I = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n + mn^2 + 2mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+n+2)}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \lim_{M \to \infty} \sum_{m=1}^{M} (\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n+2})$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+2}}{n(n+2)}$

可用裂项法得 $I = 7/4$

12．（1）用裂项法得 $I = 1/4$

（2）$I_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+2)!}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(N+2)!}$，则原级数$= \lim_{N \to \infty} I_N = \frac{1}{2}$

13. 原级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\ln n+c+\varepsilon_n)}{2n-1}$，故其敛散性与交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{2n-1}$相同。可以证明（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1}=0$；（2）$\{\frac{\ln n}{2n-1}\}$单调下降（$n\geqslant 3$）

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{2n-1}$收敛。

14.（1）$\int_1^{+\infty}\frac{x-[x]}{x^{1+s}}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{x-n}{x^{1+s}}dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+s}}$，积分收敛。

（2）参照例 19。

15.（1）$x\in(-1,3]$；（2）$x\in[0,+\infty)$

16.（1）$S(x)=(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1)e^{\frac{x}{2}}$（$x\in R$）；

（2）$S(x)=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x}+2\cos x)$（$x\in R$）。

第8章　函数方程与微分方程

8.1　内容提要

本章主要有两个问题，一是根据实际问题和所给条件建立有自变量、未知函数的方程及初始条件。二是求解方程，包括方程的通解和满足初始条件的特解以及对解性质的讨论等。

在列方程方面，主要指有关微分方程的问题，这需要根据题意，搞清问题所涉及到的基本物理或几何量的意义，结合其他相关知识，通过分析导数与函数之间关系，使问题得到解决。

有些微分方程可能来自其他数学问题的转化，例如由积分方程得出，来自曲线积分与路径无关的充要条件等。此时应转化为微分方程来求解。

在求解函数方程方面，要充分分析方程的类型，选择合适的方法求解。重点掌握递推法和变量转化法等。做什么样的变量替换，应结合方程的具体特点，选择变量替换可采用试探方式，合适的、使方程得到简化或化成熟悉形式的则采用，否则重新选择。

8.2　例题解析

例 1　设函数 $f(x)$ 对 $(-\infty,+\infty)$ 内一切 x 有 $f(x^2)=f(x)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$，$x=1$ 处连续，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为常数。

分析　可以利用连续函数的定义和递推法进行证明。

证明　当 $x>0$ 时，由题设得到

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$$

因此有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$

当 $x<0$ 时，$f(x)=f(x^2)=f(1)$。

当 $x=0$ 时，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(1)$

故 $f(x)\equiv f(1)$

例 2 设 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，对于任意的实数 x，y 成立。证明在 $x=0$ 处连续的惟一解为 $f(x)=\alpha x$，α 为常数。

分析 可以从函数方程出发，由简单情况入手，一步一步地推导，边推导边归纳，逐步达到所希望的结果。

证明 1 首先证明对于任意的实数 c，有 $f(cx)=cf(x)$。事实上，

$f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

$f(3x)=f(2x+x)=f(2x)+f(x)=2f(x)+f(x)=3f(x)$

若 $f((n-1)x)=(n-1)f(x)$，则 $f(nx)=f((n-1)x+x)$

$=f((n-1)x)+f(x)=(n-1)f(x)+f(x)=nf(x)$

即对于任意的正整数 n，得到 $f(nx)=nf(x)$。

在上式中用 x/n 代换其中的 x，得到 $f(x)=nf(x/n)$，即 $f(x/n)=f(x)/n$，从而对于任意的正整数 n，m，我们有

$$f(mx/n)=mf(x)/n$$

又因 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$，故 $f(0)=0$。

$f(x)+f(-x)=f(x-x)=f(0)=0$，这就有 $f(-x)=-f(x)$。

用 mx/n 代替其中的 x，得 $f(-mx/n)=-mf(x)/n$

综上我们得到当 c 为有理数时，$f(cx)=cf(x)$。但任何无理数，都可以表示成有理数序列的极限。所以对于任意的无理数 c，存在有理数序列 $\{c_n\}$，使得当 $n\to\infty$ 时，$c_n\to c$。于是

$$f(cx)-c_nf(x)=f(cx)-f(c_nx)=f(cx-c_nx)=f[(c-c_n)x]$$

令 $n\to\infty$，由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f[(c-c_n)x]\to f(0)=0$。

从而对于任意的实数 c，有 $f(cx)=cf(x)$。对于任意的实数 x，$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)$，证毕。

注意 本题若将条件函数在 $x=0$ 处连续改成在区间 $(-\eta,\eta)$ 内有界，结论也一样成立。事实上，我们容易得到，对于任意的正整数 n，有 $f(x/n)=f(x)/n$ 以及 $f(0)=0$，于是得到 $|f(x)-f(0)|=|f(x)|=|f(nx/n)|=|f(nx)|/n$，因 $f(x)$ 在 $(-\eta,\eta)$ 内有界，当 x 充分小时，只要 n 充分大，$|f(x)-f(0)|$ 便可任意小，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，由例

题证明过程即知结论成立。

证明 2 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，由函数方程易知 $f(x)$ 在实数轴上是连续函数，故 $f(x)$ 在任意区间 $[u,v]$ 上可积，利用积分代换，我们有

$$
\begin{aligned}
\int_u^v f(x)\mathrm{d}x &= \int_u^{(u+v)/2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{(u+v)/2}^{v} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{(v-u)/2} f(\frac{u+v}{2}-t)\mathrm{d}t + \int_0^{(v-u)/2} f(\frac{v+u}{2}+t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{(v-u)/2} [f(\frac{u+v}{2}-t)+f(\frac{v+u}{2}+t)]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{(v-u)/2} f(\frac{u+v}{2}-t+\frac{v+u}{2}+t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{(v-u)/2} f(u+v)\mathrm{d}t \\
&= (v-u)[f(u)+f(v)]/2
\end{aligned}
$$

即 $\int_u^v f(x)\mathrm{d}x = (v-u)[f(u)+f(v)]/2$

先取 $[u,v]=[a,x]$，得到 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = (x-a)[f(a)+f(x)]/2$，

然后取 $[u,v]=[x,b]$，得 $\int_x^b f(x)\mathrm{d}x = (b-x)[f(x)+f(b)]/2$，

再取 $[u,v]=[a,b]$，得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)[f(a)+f(b)]/2$。

利用定积分的区间可加性，有

$$
\begin{aligned}
&(x-a)[f(a)+f(x)]+(b-x)[f(x)+f(b)] \\
&=(b-a)[f(a)+f(b)]
\end{aligned}
$$

解出 $f(x)=\alpha x+\beta$，其中 $\alpha=[f(b)-f(a)]/(a+b)$，$\beta=[f(a)b-f(b)a]/(a+b)$，再将 $f(x)$ 的线性形式代入原方程，得到 $\beta=0$，故 $f(x)=\alpha x$。

注意 若 $f(x)$ 连续的条件改成单调，或在任意闭区间上可积，由上面的证法 2 知结论仍然成立。另外，对于满足下列等式的函数 $\int_u^v f(x)\mathrm{d}x = (v-u)[f(u)+f(v)]/2$，通解为线性函数。很多问题可以转化为该问题的证明，请读者注意该结论。

证明 3 $\forall x$ 及自然数 n，有

$f(x)=f(n\cdot\frac{x}{n})=f((n-1)\frac{x}{n})+f(\frac{x}{n})=\cdots=nf(\frac{x}{n})$，即

$f(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}f(x)$，由条件可得

$f(\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+\cdots+\frac{x_n}{n})=f(\frac{x_1}{n})+f(\frac{x_2}{n})+\cdots+f(\frac{x_n}{n})$

从而可得 $f(\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+\cdots+\frac{x_n}{n})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$

依凸函数的 Jensen 不等式知此函数非凸非凹，因此为线性函数。又因为易知 $f(0)=0$，所以 $f(x)=\alpha x$　（α 为常数）。

例 3　设函数 $f(x)$ 对于任意的 x 及 a 满足

$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}f(t)dt=f(x)$，$a\neq 0$，试求 $f(x)$。

解　令 $x+a=u$，$x-a=v$，则 $x=(u+v)/2$，$a=(u-v)/2$，多次利用题设函数方程得

$$
\begin{aligned}
f(u)+f(v)&=f(x-a)+f(x+a)\\
&=\frac{1}{2a}\int_{(x-a)-a}^{(x-a)+a}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2a}\int_{(x+a)-a}^{(x+a)+a}f(t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2a}\int_{x-2a}^{x+2a}f(t)\mathrm{d}t=2f(x)=2\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}f(t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{a}\int_{x-a}^{x+a}f(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{u-v}\int_{v}^{u}f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

由例题 2 的证明 2 知，满足原方程的函数的通解为线性函数。

$f(x)=\alpha x+\beta$，α，β 为任意实数。

例 4　设函数 $f(x)$ 满足如下函数方程，对于任意的实数 x，y，$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，求 $f(x)$ 在实数轴上不恒为零的连续解。

分析　可以用数学归纳法进行求解。

解　在函数方程中令 $y=0$，得 $2f(x)=2f(x)f(0)$，因 $f(x)$ 不恒为零，所以 $f(0)=1$。在原函数方程中令 $x=0$，得到

$f(y)+f(-y)=2f(y)$，即对于任意实数 x，$f(-x)=f(x)$。

因 $f(0)=1$，依据连续函数的局部保号性，存在常数 $c>0$，使得

当 $x\in[0,c]$ 时，有 $f(x)>0$ ，下面根据 $f(c)$ 的取值范围进行讨论。

当 $f(c)\leqslant 1$ 时，存在 $\theta\in[0,\pi/2)$ ，使得 $f(c)=\cos\theta$ 。下面用数学归纳法证明对于任意的实数 x ，有 $f(cx)=\cos\theta x$ 。原函数方程可以写成 $f(x+y)=2f(x)f(y)-f(x-y)$ ，令 $x=y=c$ ，得到

$$f(2c)=2[f(c)]^2-f(0)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$$

假设对于一切小于 n 的正整数，结论成立。则有

$$\begin{aligned}f(nc)&=f[(n-1)c+c]=2f[(n-1)c]f(c)-f[(n-2)c]\\&=2\cos(n-1)\theta\cos\theta-\cos(n-2)\theta=\cos n\theta\end{aligned}$$

即对于任意的正整数 n ，我们有 $f(nc)=\cos n\theta$ 。

将原函数方程写成 $f(x)f(y)=[f(x+y)+f(x-y)]/2$

令 $x=y=c/2$ 代入上式，$[f(c/2)]^2=(\cos\theta+1)/2=[\cos(\theta/2)]^2$

注意到 $c/2\in[0,c]$ ，所以 $f(c/2)>0$ ，故有 $f(c/2)=\cos(\theta/2)$ 。

再次利用数学归纳法，若已有 $f(c/2^{n-1})=\cos(\theta/2^{n-1})$ ，则

$$\begin{aligned}[f(c/2^n)]^2&=[f(c/2^{n-1})+f(0)]/2=[\cos(\theta/2^{n-1})+1]/2\\&=[\cos(\theta/2^n)]^2\end{aligned}$$

因 $f(c/2^n)$ 为正，所以 $f(c/2^n)=\cos(\theta/2^n)$ 。

这就证明了上式对一切正整数 n 成立。由 $f(nc)=\cos n\theta$ 和 $f(c/2^n)=\cos(\theta/2^n)$ ，我们得到 $f(mc/2^n)=\cos(m\theta/2^n)$ 。

注意到任何 $x>0$ ，总可以写成是 $m/2^n$ 形式的实数的极限，即对于任意的 $x>0$ ，存在 $\{x_i\}$ （形如 $m/2^n$ ），使得当 $i\to\infty$ 时，$x_i\to x$ ，因此有 $f(x_ic)=\cos x_i\theta$ ，令 $i\to\infty$ ，由连续性得到 $f(cx)=\cos\theta x$ ，再注意到 $f(x)$ 为偶函数及 $f(0)=1$ ，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(cx)=\cos\theta x$ 也成立。

将上式中的 x 换成 x/c ，记 $a=\theta/c$ ，就有 $f(x)=\cos ax$ 。

若 $f(c)>1$ ，类似可以证明 $f(x)=\operatorname{ch}ax$ 。

例 5 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有界，且满足 $f(x)-\dfrac{1}{2}f(\dfrac{x}{2})=x^2$ ，求函数 $f(x)$ 。

分析 可以利用递推法和极限进行求解。

解 已知$f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2$，依次类推有

$$\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})-\frac{1}{2^2}f(\frac{x}{2^2})=\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2$$

$$\frac{1}{2^2}f(\frac{x}{2^2})-\frac{1}{2^3}f(\frac{x}{2^3})=\frac{1}{2^2}(\frac{x}{2^2})^2$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}f(\frac{x}{2^{n-1}})-\frac{1}{2^n}f(\frac{x}{2^n})=\frac{1}{2^{n-1}}(\frac{x}{2^{n-1}})^2$$

将上面各式相加，得到

$$f(x)-\frac{1}{2^n}f(\frac{x}{2^n})=x^2(1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{3(n-1)}})$$

$$f(x)=\frac{1}{2^n}f(\frac{x}{2^n})+\frac{8}{7}x^2[1-(\frac{1}{2^3})^n]$$

因为当$n\to\infty$时，$x/2^n\to 0$，又$f(x)$在$x=0$附近有界，所以$f(x)=8x^2/7$。

例 6 已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，$f'(0)$存在，且对任意的实数x,y恒有$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，求函数$f(x)$。

分析 可以利用导数的定义求出导数，再积分得到。也可以转化为例题2的形式进行求解。

解法 1 由于$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，令$y=0$，则$f(x)=f(x)+f(0)$，即$f(0)=0$。

又由原函数方程可得$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x$，当$y\to 0$时，对上式两端取极限，于是有

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}[\frac{f(y)-f(0)}{y-0}+2x]$$

$$=f'(0)+2x$$

即$f'(x)=f'(0)+2x$，两边积分得$f(x)=f'(0)x+x^2+C$，将$f(0)=0$代入上式得$C=0$，故$f(x)=f'(0)x+x^2$。

解法 2 设$g(x)=f(x)-x^2$，$x\in R$，则有$g(x+y)=g(x)+g(y)$，$g(x)$为实数轴上连续函数，由例题 2 知道：$g(x)$为齐次线性函数，

且 $g(x)=g(1)x$，其中 $g(1)=f(1)-1$。

因此 $f(x)=x^2+[f(1)-1]x$，和解法一答案等价。

例 7 求出满足下列方程 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$ 的可微函数 $f(x)$。

分析 对于定上限或变上限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则可以先考虑做变量替换使之成为简单形式再说。

解 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)$

$=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$

原方程等价为 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$

两边对 x 求导，得到

$f(x)=1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

再次对 x 求导，得 $f'(x)=f(x)$，积分得到 $f(x)=C\mathrm{e}^x$，又易知 $f(0)=1$，得 $C=1$，故 $f(x)=\mathrm{e}^x$。

例 8 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续导数，且满足

$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t^4$，求函数 $f(x)$。

分析 方程右端被积表达式形式很复杂，可以考虑先利用极坐标替换变成简单的形式。

解 显然 $f(0)=0$，$f(x)$ 为偶函数，因此只需求出当 $t>0$ 时函数 $f(x)$ 的表达式。利用极坐标替换得

$$f(t)=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r^3 f(r)\mathrm{d}r+t^4=4\pi\int_0^t r^3 f(r)\mathrm{d}r+t^4$$

上式两边对 t 求导，得 $f'(t)=4\pi t^3 f(t)+4t^3$。

即 $\dfrac{f'(t)}{\pi f(t)+1}=4t^3$，也即 $\dfrac{1}{\pi}\ln[\pi f(t)+1]=t^4+C$

将 $f(0)=0$ 代入上式，得 $C=0$，于是

$\pi f(t)+1=\mathrm{e}^{\pi t^4}$，也即 $f(t)=(\mathrm{e}^{\pi t^4}-1)/\pi$，$t\geqslant 0$。

由于 $f(x)$ 是偶函数，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$f(x)=(\mathrm{e}^{\pi x^4}-1)/\pi$。

例 9 设$u=u(\sqrt{x^2+y^2})$具有连续的二阶偏导数，且满足函数方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，试求函数$u(x,y)$的表达式。

分析 函数$u(x,y)$是x^2+y^2的函数，可以考虑采用极坐标进行转化，利用求解微分方程的方法得到表达式。

解 令$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则$u(x,y)=u(r)$。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\frac{x}{r})^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{r-x\frac{x}{r}}{r^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=(\frac{x}{r})^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{y^2}{r^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

由对称性有 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\frac{y}{r})^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{x^2}{r^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$

从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}=0$

即 $\frac{u''(r)}{u'(r)}=-\frac{1}{r}$，亦即$\ln u'(r)=-\ln r+\ln C_1$

因此 $u'(r)=\frac{C_1}{r}$，即 $u(r)=C_1\ln r+C_2$。

例 10 设$z=xf(\frac{y}{x})+2yf(\frac{x}{y})$， 其中函数 $f(x)$ 二阶可导，且$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{x=a}=-by^2$，求$f(x)$（$a>0,b>0$）。

分析 先求出z对x、y的二阶偏导数，利用适当的变量替换，化为常微分方程进行求解。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})+xf'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})+2yf'(\frac{x}{y})\frac{1}{y}$

$$=f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})+2f'(\frac{x}{y})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})+2f'(\frac{x}{y})]$$

$$=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f''(\frac{x}{y})\frac{1}{x}+2f''(\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2})$$

$$=-\frac{y}{x^2}f''(\frac{x}{y})-\frac{2x}{y^2}f''(\frac{x}{y})$$

因为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{x=a}=-by^2$，所以 $-\frac{y}{a^2}f''(\frac{y}{a})-\frac{2a}{y^2}f''(\frac{a}{y})=-by^2$

令 $\frac{y}{a}=u$，则 $\frac{u}{a}f''(u)+\frac{2}{au^2}f''(\frac{1}{u})=a^2bu^2$

$u^3f''(u)+2f''(\frac{1}{u})=a^3bu^4$

再令 $\frac{1}{u}=t$，即 $u=\frac{1}{t}$，$\frac{1}{t^3}f''(\frac{1}{t})+2f''(t)=a^3b\frac{1}{t^4}$

亦即 $2u^3f''(u)+f''(\frac{1}{u})=\frac{a^3b}{u}$

解方程组 $u^3f''(u)+2f''(\frac{1}{u})=a^3bu^4$

$2u^3f''(u)+f''(\frac{1}{u})=\frac{a^3b}{u}$

得到 $f''(u)=-\frac{1}{3}a^3bu+\frac{2}{3}a^3b\frac{1}{u^4}$，积分得

$$f'(u)=-\frac{1}{6}a^3bu^2-\frac{2}{9}a^3bu^{-3}+C_1$$

再次积分得 $f(u)=-\frac{1}{18}a^3bu^3+\frac{1}{9}a^3bu^{-2}+C_1u+C_2$

故 $f(x)=-\frac{1}{18}a^3bx^3+\frac{1}{9}a^3bx^{-2}+C_1x+C_2$

例 11 设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$，求 $Q(x,y)$。

分析 曲线积分和路径无关，应想到满足 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$。

解 由曲线积分与路径无关的条件有

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$

$Q(x,y)=x^2+C(y)$，其中 $C(y)$ 为待定函数。

又 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+[x^2+C(y)]\mathrm{d}y$

$=\int_0^t 2x\cdot 0\mathrm{d}x+\int_0^1[t^2+C(y)]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1 C(y)\mathrm{d}y$

$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$=\int_0^t[1^2+C(y)]\mathrm{d}y=t+\int_0^t C(y)\mathrm{d}y$

由题设条件有

$$t^2+\int_0^1 C(y)\mathrm{d}y=t+\int_0^t C(y)\mathrm{d}y$$

等式两边对 t 求导，得

$$2t=1+C(t),\quad C(t)=2t-1$$

从而 $C(y)=2y-1$，故 $Q(x,y)=x^2+2y-1$。

例 12 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，且方程 $[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$ 为一全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解。

分析 由方程满足全微分方程的条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，导出 $f(x)$ 满足的微分方程。

解 方程为全微分方程的充要条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

即 $x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$

亦即 $f''(x)+f(x)=x^2$

该常微分方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，$\lambda=\pm i$

用待定系数法易求该非齐次方程的一个特解为 $f^*(x)=x^2-2$

故 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$

将 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ 代入上式求出 $C_1=2,C_2=1$

于是 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$

原全微分方程等价于

$$[xy^2-(2\cos x+2\sin x)y+2y]\mathrm{d}x+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)\mathrm{d}y=0$$

利用分项组合法

$$(xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y)+\mathrm{d}[(-2\sin x+\cos x)y]+2(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)=0$$

即 $\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2y^2)+\mathrm{d}[(-2\sin x+\cos x)y]+2\mathrm{d}(xy)=0$

故 $\frac{1}{2}x^2y^2+(-2\sin x+\cos x)y+2xy=C$ 即为原全微分方程的通解。

例 13 设对半空间 $x\geqslant 0$ 中任意光滑闭曲面 S 均有

$\oint\!\!\oint_S \mathrm{e}^{-x}u(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,yu^2(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，其中 $u(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有连续导数，求函数 $u(x)$。

分析 可以先用高斯公式对积分进行变换，利用任意性得出 $u(x)$ 满足的微分方程。

解 记 S 围成的区域为 Ω，先由高斯公式得

$$\iiint_\Omega[\mathrm{e}^{-x}u'(x)-\mathrm{e}^{-x}u(x)+\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,u^2(x)]\mathrm{d}V=0$$

由 Ω 得任意性有

$$\mathrm{e}^{-x}u'(x)-\mathrm{e}^{-x}u(x)+\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,u^2(x)=0\quad(x\geqslant 0),$$

亦即 $u'(x)-u(x)=-\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,u^2(x)$

该方程是伯努利类型方程，解这个方程得

$$u^{-2}(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u^{-1}(x)=-\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u^{-1}(x))+u^{-1}(x)=\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1},$$

即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^xu^{-1}(x))=\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$

$$\mathrm{e}^xu^{-1}(x)=\int\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x+C\xlongequal{t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\int(t^2+1)^2\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t+C$$

$$=2\int(t^4+t^2)\mathrm{d}t+C=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C$$

$$=\frac{2}{5}(e^x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

因此 $u(x)=\dfrac{e^x}{\frac{2}{5}(e^x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+C}\quad(x\geqslant 0)$，

其中 $C>0$ 为任意常数。

例 14 解微分方程 $y'\cos y=(1+\cos x\sin y)\sin y$ 。

分析 该微分方程不属于熟知类型，可以先利用变量替换变成已知类型微分方程。

解 令 $z=\sin y$ ，则 $\cos y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$ 。代入原方程，得伯努利方程

$$\frac{dz}{dx}-z=z^2\cos x$$

两边同除以 $z^2\Rightarrow x^{-2}\dfrac{dz}{dx}-z^{-1}=\cos x$

再令 $z^{-1}=u\Rightarrow -z^{-2}\dfrac{dz}{dx}-z^{-1}=\dfrac{du}{dx}$

代入上方程，得 $\dfrac{du}{dx}+u=-\cos x$

解此一阶线性方程 $u=e^{-\int dx}(-\int\cos x\cdot e^{\int dx}dx+C_1$

$$=-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+C_1e^{-x}$$

代回 $u=\dfrac{1}{z}$ 而 $z=\sin y$ ，得 $\dfrac{1}{\sin y}=-\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)+C_1e^{-x}$ 。

即得原方程通解为 $\dfrac{2}{\sin y}+\cos x+\sin x=C\ e^{-x}$ 。

例 15 求微分方程：$(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$ 的通解。

分析 这虽然是变系数的二阶线性微分方程，但不难通过观察得到一个特解 $y_1=x$ ，再利用 $y_2=u(x)y_1$ 求另一个线性无关的特解即可。另外一种解法是通过变量代换把原方程化为一阶方程。

解法 1 因 $y_1=x$ 满足原方程，故是其一个特解，设 $y_2=u(x)y_1=xu(x)$ ，求它的一阶和二阶导数后代入方程，得

$$(x^2\ln x)(xu''(x)+2u'(x))-x(xu'(x)+u(x))+xu(x)=0$$

即 $x^3\ln x)u''(x)+x^2(2\ln x-1)u'(x)=0$

令 $p=u'(x)$，化简后得

$$(x\ln x)\frac{dp}{dx}+(2\ln x-1)p=0$$

由分离变量法解得 $p=-\frac{\ln x}{x^2}$（取一个解即可）。故

$$u=\int p dx=\int-\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{\ln x+1}{x}+C$$

从而 $y_2=\ln x+1$，原方程的通解为 $y=C_1x+C_2(\ln x+1)$。

解法 2 令 $t=\ln x$，则

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

代入原方程得

$$t[\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dt}]-[\frac{dy}{dt}-y]=0$$

记 $u=\frac{dy}{dt}-y$，则原方程化为 $t\frac{du}{dt}-u=0$，用分离变量法解此方程，得 $u=-C_1t$，从而有

$$\frac{dy}{dt}-y=-C_1t$$

解此一阶线性方程，得

$$\begin{aligned}y&=e^{\int dt}[\int(-C_1t)e^{-\int dt}dt+C_2]\\&=C_1(t+1)+C_2e^t\\&=C_1(\ln x+1)+C_2x\end{aligned}$$

例 16 求方程 $4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=1$ 的通解。

分析 观察出特解形如 $y^*=ax^{-1}$，定出 a 值，相应齐次方程为欧拉方程，作变换 $x=e^t$ 即可化为常系数线性齐次方程。

解 首先试探方程是否有形如 $y^*=ax^{-1}$ 的特解，代入方程得

$a(-24-8-4)=1$　即 $a=-1/36$

求出特解为 $y^*=-\frac{1}{36}x^{-1}$，再求齐次方程

$4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=0$，即 $x^3y'''-x^2y''+xy'=0$ 的通解，该方程是欧拉方程，令 $x=e^t$ 可化为常系数线性齐次方程

$$\frac{d^3y}{dt^3}-4\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}=0$$

解其特征方程 $r(r-2)^2=0$，得通解

$$y=C_1+C_2e^{2t}+C_3te^{2t}=C_1+C_2x^2+C_3x^2\ln x$$

所以，原方程的通解为

$$y=C_1+C_2x^2+C_3x^2\ln x-\frac{1}{36x}$$

例 17　一小船 A 从原点出发，以匀速 v_0 沿 y 轴正向行驶，另一小船 B 从 x 轴上的点 $(x_0,0)$ $(x_0<0)$ 出发，朝 A 追去，其速度方向始终指向 A，速度大小为常数 v_1。（1）求船 B 的运动方程。（2）如果 $v_1>v_0$，问船 B 需要多少时间才能追上船 A。

分析　利用导数的物理含义，先建立运动轨迹的微分方程，解此方程，求出追上所需要的时间。

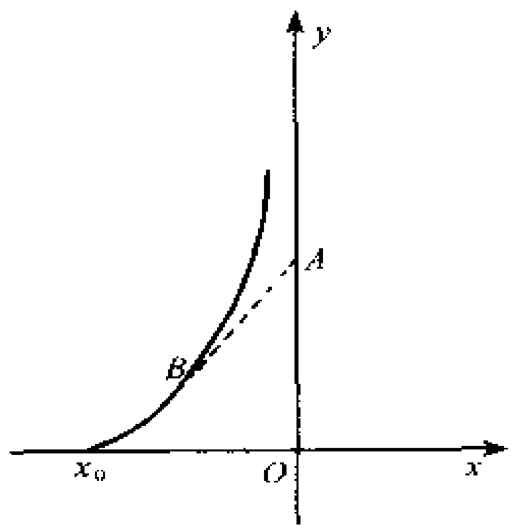


图 8-1

解　设小船 B 的运动轨迹为 $y=y(x)$，因为小船 B 的速度方向始终指向船 A，（见图 8-1）故有 $\frac{dy}{dx}=\frac{v_0t-y}{-x}$ 即 $-x\frac{dy}{dx}=v_0t-y$

上式两端同时对 x 求导，得 $\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{v_0}\frac{d^2y}{dx^2}$

又因船 B 的速度大小为 v_1，故

$$v_1=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dx}{dt})^2}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\frac{dx}{dt}$$

从而得到微分方程 $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{v_0}{v_1}\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}=0$，以及初值条件 $y|_{x=x_0}=0$，$\dfrac{dy}{dx}|_{x=x_0}=0$。

显然该方程为可降阶方程，令 $p=\dfrac{dy}{dx}$，$k=\dfrac{v_0}{v_1}>0$，得到

$x\dfrac{dp}{dx}+k\sqrt{1+p^2}=0$，$p(x_0)=0$，解此微分方程，得

$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\ln\dfrac{x_0^k}{x^k}$，并解得 $\dfrac{dy}{dx}=p=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{x_0}{x})^k-(\dfrac{x}{x_0})^k]$

再积分，以及利用 $y(x_0)=0$，于是小船的运动轨迹为

当 $k\neq 1$ 时，$y(x)=-\dfrac{x_0}{2}[\dfrac{1}{k-1}(\dfrac{x_0}{x})^{k-1}+\dfrac{1}{k+1}(\dfrac{x}{x_0})^{k+1}-\dfrac{2k}{k^2-1}]$

当 $k=1$ 时，$y(x)=-\dfrac{x_0}{2}[\ln\dfrac{x_0}{x}+\dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{x_0})^2-\dfrac{1}{2}]$

显然只有当 $k=\dfrac{v_0}{v_1}<1$ 时，船 B 才能追上船 A，而且当船 B 追上船 A 时，其横坐标为 0，故要求出

$$\lim_{x\to 0-}y(x)=\lim_{x\to 0-}-\frac{x_0}{2}[\frac{1}{k-1}(\frac{x_0}{x})^{k-1}+\frac{1}{k+1}(\frac{x}{x_0})^{k+1}-\frac{2k}{k^2-1}]$$

$$=-\frac{x_0}{2}\frac{2k}{1-k^2}$$

即此时船 B 的纵坐标为 $-\dfrac{x_0}{2}\dfrac{2k}{1-k^2}$，代入方程 $-x\dfrac{dy}{dx}=v_0t-y$ 中，得 $v_0T=-\dfrac{x_0}{2}\dfrac{2k}{1-k^2}$，故 $T=-\dfrac{x_0k}{v_0(1-k^2)}=\dfrac{x_0v_1}{v_0^2-v_1^2}$，即船 B 追上船 A 的时间为 $T=\dfrac{x_0v_1}{v_0^2-v_1^2}$。

例 18 一质量为 m 的质点，以初速度 v_0 垂直地向上抛去，空气阻力等于 Av^2（$A>0$ 为常数），试求到达最高点的时间。

解 设在向上抛时质点在时刻 t 的速度为 $v(t)$，则由牛顿第二定律得

$$-mg - Av^2 = m\frac{dv}{dt}$$

该方程是可分离变量的微分方程，容易求出它的通解为

$$\sqrt{\frac{m}{Ag}}\arctan\sqrt{\frac{A}{mg}}v = -t + C$$

将初始条件 $v(0)=v_0$ 代入上式，得

$$\sqrt{\frac{m}{Ag}}\arctan\sqrt{\frac{A}{mg}}v_0 = C$$

于是得

$$v = \sqrt{\frac{mg}{A}}\tan(\arctan\sqrt{\frac{A}{mg}}v_0 - \sqrt{\frac{Ag}{m}}t)$$

所以，到达最高点的时间

$$t = \sqrt{\frac{m}{Ag}}\arctan(\sqrt{\frac{A}{mg}}v_0)$$

例 19　长为 l 的均匀链条放在一个水平的无摩擦的桌面上，链条在桌边悬挂下来的长度为 b，求由重力使链条全部滑离桌面所需要的时间。

解　如图 8-2 所示，设在时刻 t，链条在桌边下垂的部分长为 $x=x(t)$，并记链条的线密度为 μ，则使链条下滑的重力为 μxg。由牛顿第二定律

$$\mu xg = \mu l\frac{d^2x}{dt^2}$$

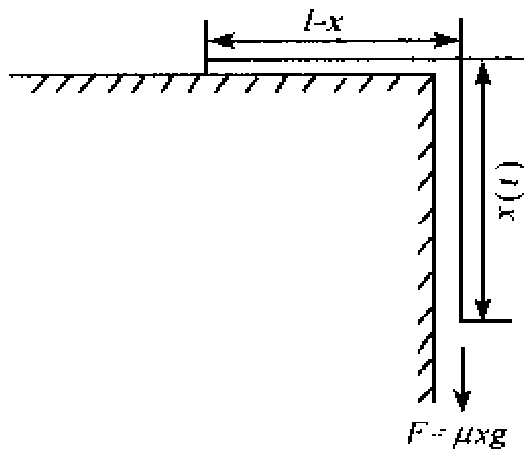


图 8-2

得到二阶常系数线性微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{g}{l}x = 0\\ x(0)=b, x'(0)=0\end{cases}$$

解得

$$x=\frac{b}{2}(e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t})$$

当 $x=l$ 时，解得所需时间 t 为

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{l+\sqrt{l^2-b^2}}{b}$$

例 20 设一车间的容积为 10800m^3，开始时空气中 CO_2 的浓度为 0.12%，为降低 CO_2 的含量，用一台风量为 $25\text{m}^3/\text{s}$ 的鼓风机通入 CO_2 浓度为 0.04% 的新鲜空气，假定通入的新鲜空气与车间原有空气能很快混合均匀，且以相同风量排出，问鼓风机开动 10 min 后，车间中 CO_2 的浓度为多少？

分析 先根据 CO_2 的量列出方程，导出微分方程并求解。

解 设车间中 CO_2 的浓度和时间 t 的关系为 $y=y(t)$。由题意知

$$10800y(t)+25\Delta t\times0.04\%=(10800+25\Delta t)y(t+\Delta t)$$

即
$$10800\Delta y+25\Delta ty(t+\Delta t)=25\Delta t\times0.04\%$$

或
$$10800\frac{\Delta y}{\Delta t}+25y(t+\Delta t)=0.01$$

Δt 越小上式越精确，令 $\Delta t\to0$ 得微分方程

$$10800\frac{dy}{dt}+25y=0.01$$

解得 $y=Ce^{-t/432}+0.0004$

将初始条件 $y(0)=0.12\%$ 代入上式，得 $C=0.0008$

即 $y=0.0008e^{-t/432}+0.0004$

从而 $y(600)=0.0599\%$，即 10min 后车间中 CO_2 的浓度为 0.0599%。

例 21 有一电阻 $R=10\Omega$，电感 $L=2\text{ H}$ 和电源电压 $E=20\sin5t$ (V) 串联组成电路，开关 S 闭合后，电路中有电流通过。求电流 i 和时间 t 的函数关系。

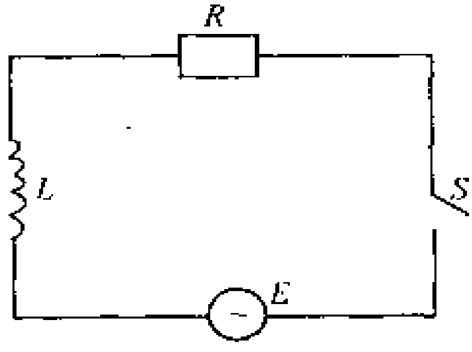


图 8-3

解 如图 8-3 所示。由电学知道，电

感 L 的感应电动势为 $L\dfrac{di}{dt}$，由回路电压定律，

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

即 $\dfrac{di}{dt} + 5i = 10\sin 5t$

初始条件为 $i(0) = 0$。

上述方程为一阶线性非齐次微分方程，容易求出

$$\begin{aligned} i &= e^{-\int 5dt}\left(\int 10\sin 5t e^{\int 5dt} dt + C\right) \\ &= Ce^{-5t} + \sin 5t - \cos 5t \end{aligned}$$

将初始条件 $i(0) = 0$ 代入上式，得 $C = 1$。

于是所求电流为

$i(t) = e^{-5t} + \sin 5t - \cos 5t$

例 22　一质量为 m 的潜水艇从水面由静止状态开始下沉，所受阻力与下沉速度成正比（比例系数 $k > 0$），求潜水艇下沉深度与时间的函数关系。

解　设下沉速度与时间的函数关系为 $y = y(t)$。潜水艇在下沉过程中受到重力和阻力作用，由牛顿第二定律有

$$mg - k\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

初始条件为 $y(0) = 0, y'(0) = 0$。

即　　$y'' + \dfrac{k}{m}y' = g$，　$y(0) = 0, y'(0) = 0$

这是二阶常系数线性非齐次方程。特征方程为

$$r^2 + \frac{k}{m}r = 0$$

$$r_1 = 0, r_2 = -\frac{k}{m}$$

对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

又因为 $q=0$， $p=\dfrac{k}{m}\neq 0$， 设 $y^*=bt$， 将 $y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$ 代入原方程有

$\dfrac{kb}{m}=g$　即　$b=\dfrac{mg}{k}$

于是　$y^*=\dfrac{mg}{k}t$

方程的通解为

$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{mg}{k}t$

代入初始条件 $y(0)=0$， 将 $y'(0)=0$ 代入

$y'=-\dfrac{k}{m}C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{mg}{k}$

得 $C_1=-\dfrac{m^2}{k^2}g$， $C_2=\dfrac{m^2}{k^2}g$

从而 $y(t)=\dfrac{mgt}{k}-\dfrac{m^2}{k^2}g(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$

例 23　在 $R-L-C$ 串联电路中，已知 $C=0.2\,\mathrm{F}$， $L=1\,\mathrm{H}$， $R=6\,\Omega$， 电源电压 $E=5\sin 10t\,(\mathrm{V})$， 设在 $t=0$ 时，将电路闭合，并设电容初始电压为零，试求开关闭合后的回路电流。

解　如图 8-4 所示，设电路中的电流为 $i(t)$，电容器所带的电量为 $Q(t)$， 自感电动势为 $E_L(t)$ 。由电学知道， $i=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ ， $U_c=\dfrac{Q}{C}$，

$E_L=-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$,因此在 $R-L-C$ 电路中各元件的电压降分别为

$$U_R=Ri=RC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t},\quad U_c=\frac{Q}{C},$$

$$U_L=-E_L=LC\frac{\mathrm{d}^2U_C}{\mathrm{d}t^2}$$

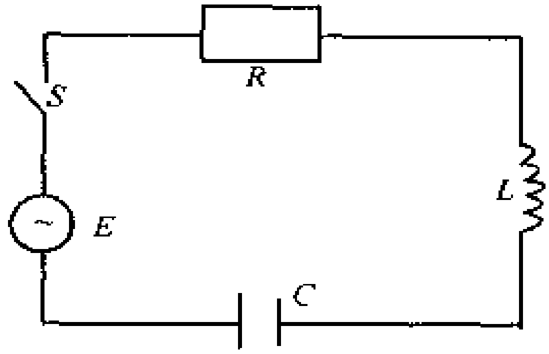


图 8-4

根据回路电压定律，有$U_R+U_C+U_L=E$，把U_R,U_C,U_L代入上式得

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2}+RC\frac{dU_C}{dt}+U_C=E$$

即
$$\frac{d^2U_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dU_C}{dt}+\frac{1}{LC}U_C=\frac{E}{LC}$$

也即
$$\frac{d^2U_C}{dt^2}+6\frac{dU_C}{dt}+5U_C=25\sin 10t$$

上述方程的特征方程为$r^2+6r+5=0$

$$r_1=-1,r_2=-5$$

对应的线性齐次方程的通解为

$$U_C=C_1e^{-t}+C_2e^{-5t}$$

又因为$\pm 10i$不是特征方程的根，故设$U^*=a\cos 10t+b\sin 10t$，把$U^*,U^{*\prime},U^{*\prime\prime}$代入原方程并化简得

$$(-95b-60a)\sin 10t+(-95a+60b)\cos 10t=25\sin 10t$$

比较同类项系数，则有

$$\begin{cases}-95b-60a=25\\-95a+60b=0\end{cases}$$

解得　$a=-0.1188,\ b=-0.1881$。

从而　$U_C=C_1e^{-t}+C_2e^{-5t}-0.1881\sin 10t-0.1188\cos 10t$

将初始条件$U_C(0)=0$代入上式，$U_C'(0)=0$代入

$$U_C'=-C_1e^{-t}-5C_2e^{-5t}-1.881\cos 10t+1.188\sin 10t$$

得$C_1=0.6188,\quad C_2=-0.5000$。从而

$$U_C = 0.6188e^{-t} - 0.5000e^{-5t} - 0.1881\sin 10t - 0.1188\cos 10t$$

注意到$i=\dfrac{dQ}{dt}$，$U_C=\dfrac{Q}{C}$，故$i=C\dfrac{dU_C}{dt}$。从而

$$i = -0.1238e^{-t} + 0.5000e^{-5t} - 0.3762\cos 10t + 0.2376\sin 10t$$

例 24 设曲线对称于x轴，在x轴上某点发出的光经曲线反射能成为平行于对称轴的平行光，则该曲线必是抛物线，且光源为焦点。

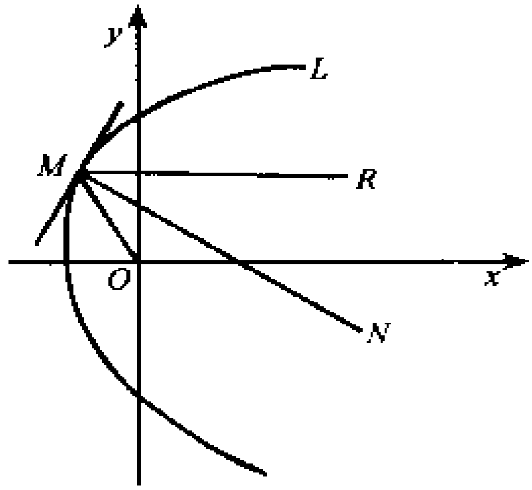


图 8-5

证明 设光源位于原点$O(0,0)$，如图 8-5 所示，曲线L的方程为$y=y(x)$，且由点$O(0,0)$发出的光线经曲线反射都成为平行于x轴的平行光。

考查曲线上任一点$M(x,y)$，MN为点M处的法线，由光的反射定律，有$\angle OMN=\angle NMR$。点M处的切线斜率为y'，法线斜率为$-1/y'$，OM的斜率为y/x，于是有

$$\tan\angle OMN = \frac{-\dfrac{1}{y'}-\dfrac{y}{x}}{1+(-\dfrac{1}{y'})\dfrac{y}{x}} \qquad \tan\angle NMR = \frac{1}{y'}$$

由$\tan\angle OMN=\tan\angle NMR$，可得

$$\frac{1}{y'} = -\frac{x+yy'}{xy'-y}, \quad yy'^2 + 2xy' - y = 0$$

即$y'=-\dfrac{x}{y}\pm\sqrt{(\dfrac{x}{y})^2+1}$，该方程是齐次方程，令$u=\dfrac{y}{x}$，方程变为

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{-1\pm\sqrt{1+u^2}}{u}$$

分离变量，解出

$$u^2 = \frac{C^2}{x^2} + \frac{2C}{x}$$

以$u=\frac{y}{x}$代入，得到

$$y^2=2C(x+\frac{C}{2})$$

这是以原点为焦点，对称轴为x轴的抛物线。

8.3 自测题及提示

8.3.1 自测题

1．若函数$f(x)$满足下列条件，对一切$u,v(u\neq v)$恒有$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=f'(pu+qv)$，其中$p,q>0$且$p+q=1$，试求$f(x)$的一般形式。

2．试求出每一个实值连续函数$f(x)$，它的定义域为 $x\geqslant 0$，且函数满足$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\sqrt{f(0)f(x)}$。

3．设连续函数$f(x)$在实数轴上不恒为零，且满足方程$f(x+y)=f(x)f(y)$，求$f(x)$。

4．求在实轴上满足方程$f(\frac{x+y}{2})=\frac{f(x)+f(y)}{2}$的连续函数。

5．证明满足方程$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$的惟一可导函数是$f(x)=\tan ax$，其中$a$为常数。

6．设函数$f(t)$在$[1,+\infty)$上存在连续的二阶导数，且$f(1)=0$，$f'(1)=1$，又二元函数$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$满足

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求$f(t)$在$[1,+\infty)$上的最大值。

7．已知函数$f(x)$满足方程$f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，试求$f(x)$。

8．设$f(x)$为可微函数，且满足$f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$，试求函数$f(x)$。

9．求具有连续二阶导数的函数$f(x)$，使

$\oint_L (\ln x - f'(x))\frac{y}{x}\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y = 0$，其中 L 为 xOy 平面上第一象限内任意一条光滑闭曲线，且 $f(1) = f'(1) = 0$。

10. 一单摆长为 l，质量为 m，作简谐运动。假定其来往摆动的偏角很小（即 $\sin\theta \approx \theta$），试求其运动方程。

8.3.2 自测题提示

1. 交换 u,v，得到 $f'(pv+qu) = f'(pu+qv)$，若 $p \neq q$，则 $f'(x)$ 为常数，$f(x)$ 为线性函数；若 $p = q$，易得到 $\frac{f'(v)-f'(u)}{2} = f'(\frac{u+v}{2})$，可以推出 $f'(x)$ 为线性函数，$f(x)$ 为二次函数。

2. 若 $f(0) = 0$，$f(x) \equiv 0$；若 $f(0) \neq 0$，令 $g(x) = \sqrt{f(x)/f(0)}$，可以得到 $g(x)$ 的微分方程，通过求解 $g(x)$ 再求出 $f(x)$。

3. 先证明对于任意的 x，$f(x) > 0$，再作代换 $F(x) = \log_a x$，$a = f(1)$，得到 $F(x+y) = F(x) + F(y)$，此方程的解答参见例 2。

4. 令 $g(x) = f(x) - f(0)$，则 $g(x+y) = g(x) + g(y)$，该方程的解答可参见例 2。

5. 可以利用导数的定义求解，也可令 $g(x) = \arctan f(x)$，化为例 2 中的方程。

6. 利用变量代换 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入函数方程可得欧拉方程，解出 $f(t)$，再讨论其最大值。

7. 注意到定积分 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ 是一个与变量 x 无关的常数，且大于零，于是可令 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = a > 0$，根据函数方程，求出 a，最后再求出 $f(x)$。

8. 此种类型方程含变上限积分，一般可用两边求导法消去积分号化为微分方程，另外要注意利用原方程的信息确定任意常数。

9. 该曲线积分和路径无关，利用 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，得到 $f(x)$ 满足的微分方程。

10. 沿单摆运动的方向，利用牛顿第二定律可得微分方程。

第9章　数学专题选讲

9.1　内容提要

在过去举办的十多届数学竞赛中，有许多类似的题目多次以不同的方式出现。本章试图以专题形式归纳整理这些题目，使读者对其有比较全面的理解，同时，又给出一些典型问题，供读者欣赏。

9.2　例题解析

专题1　一道极限题目

例 1　设函数 $f(x)$ 在[a,b]上连续且非负，$M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x}=M$。

分析　连续函数在闭区间上能取到最大值，即 $\exists x_0$，使得 $f(x_0)=M$，且 $\forall\varepsilon>0$，$M-\varepsilon$ 不再是 $f(x)$ 的最大值了，即有 $f(x)\geqslant M-\varepsilon$　$x\in$ 某区间。

证明　设 $f(x_0)=M$，且 $x_0\in(a,b)$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使 $U(x_0,\delta)\subset[a,b]$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Leftrightarrow M-\varepsilon<f(x)<M+\varepsilon$

又由于 $f(x)\geqslant 0$，因此

$$\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(M-\varepsilon)^n \mathrm{d}x = 2\delta(M-\varepsilon)^n$$

所以　$\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} \geqslant (2\delta)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon)$

又因为　$\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b M^n \mathrm{d}x} = (b-a)^{\frac{1}{n}} M$

故 $(2\delta)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon) \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}} M$

令$n\to\infty$，得

$M-\varepsilon\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x}\leqslant M$，由$\varepsilon$的任意性，得

$$M\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x}\leqslant M\text{，即}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x}=M$$

当$x_0=a$或b时，可以用半邻域仿上述方法证明，可得相同结论。

评注 为何 $A\geqslant B-\varepsilon$，$\forall\varepsilon>0\Rightarrow A\geqslant B$？若不然，$A<B$，取$\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$，则$B-\varepsilon=\dfrac{B+A}{2}>A$，与条件矛盾。

例 2 设$f(x)$在闭区间[a,b]上是非负连续函数，且严格单调增加，由积分中值定理知，对任意的正整数 n，存在惟一的$x_n\in(a,b)$，使$[f(x_n)]^n=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x$,试求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，并证明你的结论。

证明 由例 1 知道

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{b-a})^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x}=M\text{，其中}$$

$M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，又因为 $f(x_n)=\sqrt[n]{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$，由$f(x)$连续，严格单调增加，得

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(b)$，下证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，若不然

$\exists\varepsilon_0>0$,取N_1，$\exists n_1>N_1$，使$|x_{n_1}-b|\geqslant 0$

因为$x_n\in[a,b]$，所以$x_{n_1}\leqslant b-\varepsilon_0$

取$N_2>n_1$，$\exists n_2>N_2$，使 $x_{n_2}\leqslant b-\varepsilon_0$

$$\vdots$$

得到$\{x_{n_k}\}$且$x_{n_k}\leqslant b-\varepsilon_0$

所以$f(x_{n_k})\leqslant f(b-\varepsilon_0)$，两边取极限，得$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})\leqslant f(b-\varepsilon_0)$

但$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(b)$

因此$f(b)\leqslant f(b-\varepsilon_0)$

这与 $f(x)$ 严格单调增矛盾，故有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$。

例 3 设 $f(x),\varphi(x)$ 在[a,b]上均连续，非负。证明

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\mathrm{d}x} = M$，其中 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

证明 由第二积分中值定理，$\exists\xi\in[a,b]$，使

$\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\mathrm{d}x = \varphi(\xi)\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x$ （令 $\varphi(\xi)=k$）

原题转化为求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} = M$，可仿例题 2 证明。

例 4 设 $f(x),\varphi(x)$ 均为[a,b]上的非负连续函数，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\mathrm{d}x} = M$，其中 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$。

证明 为了能运用例题 3 的结论，我们引入如下结论：$\{a_n\}$ 为正数列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$（请读者自证）

先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\mathrm{d}x}$ 存在，简记 $I_n=\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\mathrm{d}x$，

则 $I_n^2 = (\int_a^b \varphi^{\frac{1}{2}}(x) f^{\frac{n-1}{2}}(x)\varphi^{\frac{1}{2}}(x) f^{\frac{n+1}{2}}(x)\mathrm{d}x)^2$

$\leqslant \int_a^b (\varphi^{\frac{1}{2}}(x) f^{\frac{n-1}{2}}(x))^2\mathrm{d}x \int_a^b (\varphi^{\frac{1}{2}}(x) f^{\frac{n+1}{2}}(x))^2\mathrm{d}x = I_{n-1}I_{n+1}$

所以 $\dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ 即 $\{\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\}$ 单调增加。

且 $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\mathrm{d}x} \leqslant \dfrac{\int_a^b \varphi(x) f^n(x)M\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\mathrm{d}x} = M$，其中 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

故 $\{\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\}$ 有上界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x)\mathrm{d}x}$ 存在，结合引入的结

果，有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b\varphi(x)f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b\varphi(x)f^n(x)\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\varphi(x)f^n(x)\mathrm{d}x}=M$

专题 2　与费波那奇(Fibonacci)数列有关的问题

费波那奇数列 $\{F_n\}$　$F_0=F_1=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$　$(n\geqslant 2)$是近年来数学竞赛中常出现的问题，本专题通过具体的题目对其做一些探讨。

例 1　设 $\{F_n\}$ 为费波那奇数列，令 $x_n=F_n/F_{n-1}$，则有 $x_{n+1}=1+1/x_n$。（读者自证）

例 2　设 $\{F_n\}$ 为费波那奇数列，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

利用例 1 的结论，易证明其成立。

例 3　设 $a_1=1,a_2=2$，当 $n\geqslant 3,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$,证明

（1）$\frac{3}{2}a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 2a_{n-1}$

（2）$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

分析　$\{a_n\}$ 为不含首项 $a_0=1$ 的费波那奇数列，易知 $\{a_n\}$ 为严格单调增加数列。

证明　（1）因为 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}>a_{n-1}$

所以 $\{a_n\}$ 严格单调上升，所以 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}<2a_{n-1}$　　　（9-1）

要证 $\frac{3}{2}a_{n-1}<a_n$，只要证 $a_{n-1}<2(a_n-a_{n-1})$ 或 $a_{n-1}<2a_{n-2}$ 即可，由式（9-1）即能获证。

即　$\frac{3}{2}a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 2a_{n-1}$

（2）由（1）知 $0\leqslant\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{2}{3}\frac{1}{a_{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant(\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{a_1}=(\frac{2}{3})^{n-1}$，由夹逼准则得　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$　证完

评注　事实上，费波那奇数列的一般项 F_n 趋向于无穷的速度比

n的速度还快。

例 4 证明$F_n<(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$，$F_n$为费波那奇数列的一般项。

用数学归纳法易得，证略。利用此式亦可证明例 3（2）题。

例 5 设$\{F_n\}$为费波那奇数列，求$\sum_{n=0}^{\infty}F_nx_n$收敛半径及和函数。

解 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，所以$R=\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

下面求和函数$S(x)$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx_n=F_0x^0+F_1x^1+\sum_{n=2}^{\infty}F_nx_n=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n$$

$$=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}=1+x+\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^{n+2}$$

$$=1+x+x(\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n-1)+x^2S(x)=1+x+x\big(S(x)-1\big)+x^2S(x)$$

所以$S(x)=\frac{1}{1-x-x^2}\qquad(|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2})$

例 6 与费波那奇数列有关的级数问题

（1）函数$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$，$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，求证级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$收敛并求和。

证 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，由条件得$(1-x-x^2)(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)=1$，比较系数得$a_0=a_1=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\,(n\geqslant 0)$，即$\{a_n\}$为费波那奇数列。所以原级数的部分和

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}=\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}})=(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1})-(\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}})<2$$

即部分和有界，故原级数收敛。易知a_n比n趋向于无穷的速度还快，因此有$\lim_{n\to\infty}B_n=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}=2$，即原级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}=2$ 解完

（2）已知$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ （$n=1,2,\cdots$），试求级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径及和函数。

解 令 $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$，则

$x_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{x_n}$ ，即 $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$

取 $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则有 $x_0 = 1 + \frac{1}{x_0}$

易知 $x_n > 1, x_0 > 1$，设 $\frac{1}{x_n} < q < 1,\ n = 0,1,2,\cdots$

因此

$$|x_n - x_0| = |(1 + \frac{1}{x_{n-1}}) - (1 + \frac{1}{x_0})| = \frac{1}{x_{n-1}x_0}|x_{n-1} - x_0| \leqslant q^2|x_{n-1} - x_0|$$

$\leqslant \cdots \leqslant q^{2n-2}|x_1 - x_0|$

所以 $0 < |x_n - x_0| \leqslant q^{2n-2}|x_1 - x_0|$，令 $n \to \infty$，有 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

所以 $R = \frac{1}{x_0} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 即为原级数的收敛半径。

记原函数的和函数为 $S(x)$，则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n$$

$$= x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^n = x + x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

$$= x + xS(x) + x^2 S(x)$$

所以，$S(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$ 即为所求的和函数。

（3）判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi(3+\sqrt{5})^n$ 的收敛性。

解 引入费波那奇数列通项公式

$$F_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]，\quad n=1,2,\cdots$$

$$\sqrt{5}F_{n-1}=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

$$5F_{n-1}^2=\frac{(6+2\sqrt{5})^n}{2^{2n}}+\frac{(6-2\sqrt{5})^n}{2^{2n}}-2(-1)^n$$

$2^n[5F_{n-1}^2+2(-1)^n]=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$，等式左边为一偶数，记之为$M_{2n}$，则 $(3+\sqrt{5})^n=M_{2n}-(3-\sqrt{5})^n$，

所以$\sin\pi(3+\sqrt{5})^n=-\sin\pi(3-\sqrt{5})^n$，进而原级数化为

$-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3-\sqrt{5})^n$，而由比较审敛法知此级数收敛，即原级数收敛。

附注 （1）另一种解法：

$$(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k3^{n-k}(\sqrt{5})^k+\sum_{k=0}^{n}C_n^k3^{n-k}(-\sqrt{5})^k$$

$=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k3^{n-k}[(\sqrt{5})^k+(-\sqrt{5})^k]$ 易观察出此数为偶数，记为R_{2n}，则有

$$(3+\sqrt{5})^n=R_{2n}-(3-\sqrt{5})^n$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3+\sqrt{5})^n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\pi(3-\sqrt{5})^n$，知原级数收敛。

（2）以a_n表示$(1+\sqrt{3})^n$与距离它最近的整数之差，试求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径。仿本题解法可求解。

专题3　与定积分定义有关的问题

定积分的定义是较深刻较难理解的知识点，在不等式、极限、级数等方面都有应用。本专题通过具体题目来加深对它的理解。

例1 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有连续导数，证明

$$\lim_{n\to\infty}n[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f[a+\frac{k(b-a)}{n}]]=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

分析 我们把积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$拆成n段，把$f[a+\frac{k(b-a)}{n}]$表为积

分形式，从而建立关系，便于解决问题。

证明 记 $I_n = n[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f[a+\frac{k(b-a)}{n}]]$

$$=n\{\sum_{k=1}^{n}\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f[a+\frac{k(b-a)}{n}]\mathrm{d}x\}$$

$$=n\{\sum_{k=1}^{n}\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}}[f(x)-f[a+\frac{k(b-a)}{n}]]\mathrm{d}x\}$$

$$=n\{\sum_{k=1}^{n}\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f'(\xi_k)(x-a-\frac{k(b-a)}{n})\mathrm{d}x\}$$

其中 $\xi_k \in [x, a+\frac{k(b-a)}{n}] \subset [a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}, a+\frac{k(b-a)}{n}]$。由于 $f'(x)$ 连续,记 m_k, M_k 分别表示 $f'(x)$ 在 $[a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}, a+\frac{k(b-a)}{n}]$ 上的最值，则

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} M_k(x-a-\frac{k(b-a)}{n})\mathrm{d}x \leqslant I_n$$

$$\leqslant n\sum_{k=1}^{n}\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} m_k(x-a-\frac{k(b-a)}{n})\mathrm{d}x$$

即 $-\sum_{k=1}^{n} M_k\frac{(b-a)^2}{2n} \leqslant I_n \leqslant -\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{(b-a)^2}{2n}$ 或

$$-\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} M_k\frac{b-a}{n} \leqslant I_n \leqslant -\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{b-a}{n}$$

取极限，依据黎曼（Riemann）积分定义，得

$$\lim_{n\to\infty} I_n = -\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)] = \frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$ 证完

评注 在运用夹逼准则的时候，我们认为 m_k, M_k 均大于零，但实际上 m_k, M_k 的正负性均不影响最后结果，读者可分别加以验证。

例 2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有连续导数，$|f'(x)|<M$，证明 $|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})| \leqslant \frac{M}{2n}$。

证明 左边$=|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\frac{k}{n})\mathrm{d}x|$

$$=|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-f(\frac{k}{n})]\mathrm{d}x|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-f(\frac{k}{n})]\mathrm{d}x|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f'(\xi_k)|(\frac{k}{n}-x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}M(\frac{k}{n}-x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{M}{2n^2}=\frac{M}{2n}$$

例 3 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1})$，其中$p>0$。

解 记$I_n=(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1})=\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p-n\int_0^1 x^p\mathrm{d}x$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p-\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(\frac{k}{n})^p\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[(\frac{k}{n})^p-x^p]\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[\frac{k}{n}-x]f'(\xi_k)\mathrm{d}x\quad(f(x)=x^p)$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}m_k(\frac{k}{n}-x)\mathrm{d}x\leqslant I_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}M_k(\frac{k}{n}-x)\mathrm{d}x$$

其中m_k,M_k分别为$f'(x)$在$[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$上的最小值和最大值。

因此$\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{2n}\leqslant I_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{2n}$，取极限，且依据 Riemann 积分的定义，得$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$

例 4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}})$。

分析 此极限好像能用定积分定义去做，但采用哪个函数却不易看出。可以对其做适当放缩。

解 记 $I_n=\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$，则

$\dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\leqslant I_n\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$，两端取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=1\times\int_0^1 2^x\,dx=\frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x\,dx=\frac{1}{\ln 2}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\dfrac{1}{\ln 2}$

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负，单调下降，广义可积，且 $\lim\limits_{n\to 0^+}f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})=\int_0^1 f(x)dx$

思考 （1）将“非负”去掉；（2）将“单调下降”改为“单调上升”，将“非负”去掉。结论是否仍成立？

证明 因为 $\int_0^1 f(x)dx$ 存在，利用积分对区间的可加性

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx<\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}$$

$$<\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}\qquad\text{（多了一个非负项）}$$

把 $[0,1]$ 区间 n 等分，在每个小区间取右端点的函数值，有

$I>\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})\dfrac{1}{n}$，所以 $0<\int_0^1 f(x)dx-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})<\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx=0$ （原因：$\int_0^1 f(x)dx$ 存在）

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})=\int_0^1 f(x)dx$ 证完

评注 去掉“$f(x)$ 非负”条件，考虑 $\varphi(x)=f(x)-f(1)\geqslant 0$，

则 $\varphi(x)$ 仍在 $(0,1]$ 单降，$\varphi(x)\geq 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x)=\infty$，$\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\frac{k}{n})=\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}[f(\frac{k}{n})-f(1)]=\int_0^1[f(x)-f(1)]\mathrm{d}x$　从而

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 仍成立。

若 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 单增，此时 $\lim\limits_{n\to 0^+}f(x)=-\infty$，利用上述结论，考虑 $\varphi(x)=-f(x)$ 即可。

专题 4　数学方法的应用

许多数学问题，有着直观的几何、力学等实际背景，通过观察分析图形，能够较容易解决问题。这些题目大部分要求数形结合。

例 1　设 $a,b>1$，证明 $ab\leqslant e^{a-1}+b\ln b$

分析　本题有时难以想到把不等式右边二项分别表示为定积分。但当考虑到 e^x 与 $\ln x$ 互为反函数时，我们会结合它们的图像关系和定积分的几何意义，问题便清楚了。

证明　因为 $\int_0^{a-1}e^y\mathrm{d}y=e^{a-1}-1$

$\int_1^b\ln x\mathrm{d}x=b\ln b-(b-1)$

所以　$e^{a-1}=1+\int_0^{a-1}e^y\mathrm{d}y$

$b\ln b=b-1+\int_1^b\ln x\mathrm{d}x$

故　$e^{a-1}+b\ln b$

$=\int_0^{a-1}e^y\mathrm{d}y+\int_1^b\ln x\mathrm{d}x+b$

依据定积分的几何意义及图 9-1 知

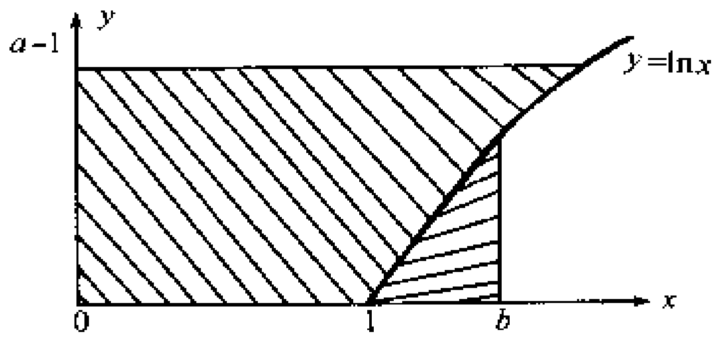


图 9-1

$$\int_0^{a-1}e^y\mathrm{d}y+\int_1^b\ln x\mathrm{d}x\geqslant b(a-1)$$

所以 $e^{a-1}+b\ln b\geqslant ab$　证完

例 2　某人要从河岸边 A 处驾船驶往对岸再步行到 B 点（见图 9-

2）。设船速为 v_1，步行速度为 v_2，问登岸点 C 选在何处才能最快到达 B 点？

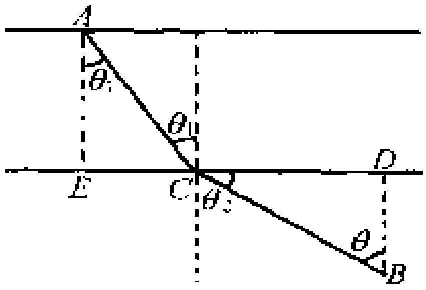


图 9-2

解 设河岸 $AE=b$，$DE=l$，$BD=d$，$\angle EAC=\theta_1$，$\angle CBD=\theta_2$，则 $AC=b\sec\theta_1$，

$BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=\sqrt{(l-b\tan\theta_1)^2+d^2}$

从 A 到 B 所花的总时间为 t，则

$$t=\frac{AC}{v_1}+\frac{BC}{v_2}=\frac{b\sec\theta_1}{v_1}+\frac{\sqrt{(l-b\tan\theta_1)^2+d^2}}{v_2}$$

取导数得

$$\frac{dt}{d\theta_1}=\frac{b}{v_1}\sec\theta_1\tan\theta_1-\frac{1}{v_2}\frac{l-b\tan\theta_1}{\sqrt{(l-b\tan\theta_1)^2+d^2}}b\sec^2\theta_1$$

令 $\dfrac{dt}{d\theta_1}=0$，结合 $\dfrac{l-btg\theta_1}{\sqrt{(l-btg\theta_1)^2+d^2}}=\sin\theta_2$，得到

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} \tag{9-2}$$

再结合

$$b\tan\theta_1+d\tan\theta_2=l \tag{9-3}$$

解出 θ_1 及 θ_2，即可确定出登岸点 C。

评注 如果把此人的行进路线代之以光线在两种不同介质中的传播，则式(9-2)便是著名的折射定律。这表明，自然界是遵循“最小作用”这一原理的。

例 3 在半径为 r 的圆形溜冰道的中央树立一柱子，现要在柱子上安装一弧光灯。问此灯应安装在怎样的高度，才使溜冰道上有最大的光照度？

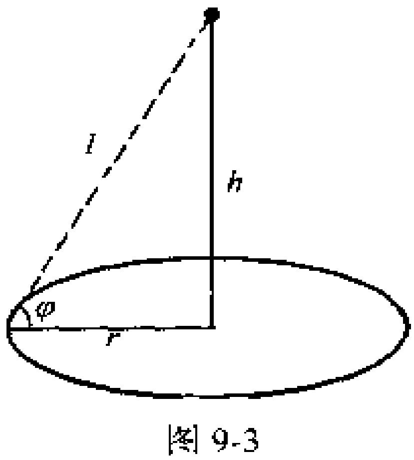


图 9-3

解 由光学知识，灯的照度 E 与光线投射角 φ 的正弦成正比，与它到光源距离 l 的平方成反比，即

$E=\dfrac{k\sin\varphi}{l^2}$，其中 k 为与光源有关的常数。

如图 9-3 所示，设灯高为 h，则有 $\sin\varphi=\dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$，$l=\sqrt{r^2+h^2}$

于是

$$E=\frac{kh}{\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad h\in(0,+\infty)$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}h}=k\frac{\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}-h3\left(r^2+h^2\right)^{\frac{1}{2}}h}{\left(r^2+h^2\right)^3}=\frac{k(r^2-2h^2)}{(r^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}$$

令 $\frac{dE}{dh}=0$ 得驻点 $h=\pm\frac{r}{\sqrt{2}}$，在 $h\in(0,+\infty)$ 内只有一个驻点 $h=\frac{r}{\sqrt{2}}$，

且当 $0<h<\frac{r}{\sqrt{2}}$ 时，$\frac{dE}{dh}>0$；当 $h>\frac{r}{\sqrt{2}}$ 时，$\frac{dE}{dh}<0$

所以 $h=\frac{r}{\sqrt{2}}$ 为极大值点，$E(\frac{r}{\sqrt{2}})$ 为极大值。由于 $E(h),h\in(0,+\infty)$ 只有一个极大值，而无极小值，因此 $E(\frac{r}{\sqrt{2}})$ 为最大值。

故灯安装在 $h=r/\sqrt{2}$ 处时，溜冰道上可获得最大光照度。

例 4 给定半径为 r 的圆，问：是否存在该圆的一个外切三角形，使其面积为圆面积的3/2倍？是否存在该圆的一个外切三角形，使其面积为圆面积的2倍？证明你的结论。

分析 如图 9-4 所示，外切 ΔABC，若固定 AB,AC 的位置，仅使 CB 作逆时针旋转，则 $S_{\Delta ABC}\to+\infty$；另一方面，显然有 $S_{\Delta ABC}>S_{\Theta}$，依据有界必有确界的原则，知 $S_{\Delta ABC}$ 有最小值，只要求出此最小值，问题便可解决。

解 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}R(AB+BC+AC)$

$$=\frac{1}{2}R[(R\tan\theta_1+R\tan\theta_2)+(R\tan\theta_2+R\tan\theta_3)+(R\tan\theta_3+R\tan\theta_1)]$$

$$=R^2(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3)$$

依图 9-4 几何关系知：$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$，$\theta_i\in(0,\frac{\pi}{2}),i=1,2,3$

因此有三角恒等式 $\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3=\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3$

而 $\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3\geqslant 3\sqrt[3]{\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3}$

所以 $\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3 \geqslant 3\sqrt[3]{\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3}$ ，即 $\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3 \geqslant 3\sqrt{3}$ 或 $\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3 \geqslant 3\sqrt{3}$

从而 $S_{\Delta ABC}=R^2(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3)\geqslant 3\sqrt{3}R^2$ 等号当且仅当 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\dfrac{\pi}{3}$ 时成立，此时外切三角形为正三角形，$S_{\Delta ABC}$ 取最小值 $3\sqrt{3}R^2$ 。故 $S_{\Delta ABC}\in[3\sqrt{3}R^2,+\infty)$ 圆面积的 3/2 倍不在此范围，故不存在这样的三角形；圆面积的 2 倍在此范围，故存在这样的三角形。

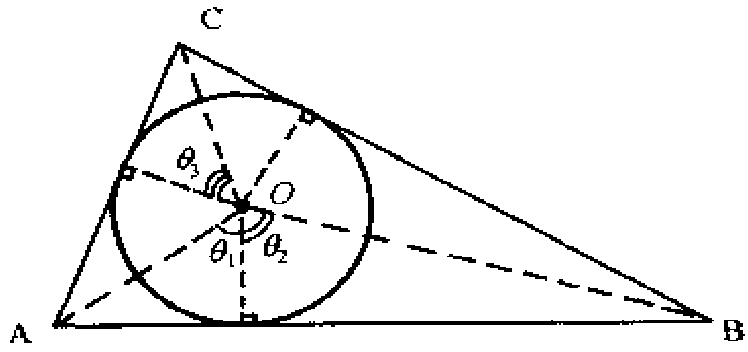


图 9-4

例 5 假定雪球是一个半径为 r 的球，其融化时体积变化率正比于雪球的表面积，比例常数为 k（k 为正数，与环境相对湿度、阳光、空气温度等因素有关）。已知 2h 内融化了其体积的 1/4，问其余部分在多长时间内融化完？

解 首先由条件列出关系式

$dV/dt=-k4\pi r^2$ （因为体积单调下降，故 $dV/dt<0$)

把 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 代入上式，得 $4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}=-4k\pi r^2$ 即 $\dfrac{dr}{dt}=-k$ 解得

$r=-kt+c$ 令 $t=0$ 时，$r=r_0$

所以 $r=r_0-kt$

依据 2h 内融化了体积的 1/4，可列出

$\dfrac{4}{3}\pi(r_0-2k)^3=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r_0^{\,3}$，可得

$$k=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)r_0$$

由上两式可求出雪球全部融化所需时间，因为雪球全部融化有 $r=0$，从而得

$$t=\frac{r_0}{k}=\frac{2\text{h}}{1-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}\approx 21.87\text{h}\approx 22\text{h}$$

雪球全部融化所需时间为 22h，故其余部分约 20h 融化完。

例 6 证明 $\frac{\pi(R^2-r^2)}{R+K}\leqslant\iint\limits_D\frac{d\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\leqslant\frac{\pi(R^2-r^2)}{r-K}$

其中 $0<K=\sqrt{a^2+b^2}<r<R$，D: $r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$。

分析 积分区域 D 是一个圆环，而所要证的不等式与圆环面积有关，通过图像解决较为简单。

证明 由积分中值公式得

$$\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=\frac{1}{\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}}\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{\pi(R^2-r^2)}{\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}}$$

点 $M(a,b)$ 如图 9-5 所示，有 M 在半径为 r 的圆内。

由于 $P(x_1,y_1)$ 在圆环内，故有 $|P_2O|-|OM|\leqslant|PM|\leqslant|P_1O|+|OM|$ 其中 P_1,P_2 分别为 P 点的最远点及最近点（相对于 M）。

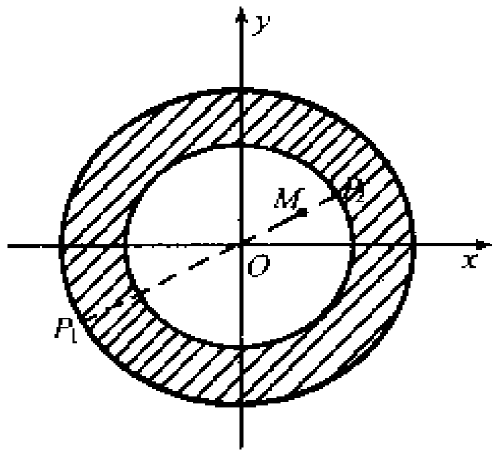


图 9-5

而 $|P_1O|=R,|P_2O|=r,|OM|=K$，

$$|PM|=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}$$

故 $r-K\leqslant|PM|\leqslant R+K$

所以 $\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{R+K}\leqslant\frac{\pi(R^2-r^2)}{\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}}\leqslant\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{r-K}$

即 $\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{R+K}\leqslant\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\leqslant\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{r-K}$ 证完

例 7 如图 9-6 所示，$AB+BC=AD$，当 AB 与 AC 的夹角 θ 发生变化时，点 C 在 AD 上移动。求 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{CD}{\theta^2}$

解 令 $CD=x$，则 $AB+BC=AC+x$

记 $AB=a, BC=b$

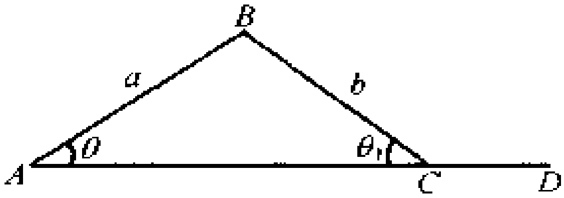


图 9-6

依据 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin\theta}=\dfrac{AB}{\sin\theta_1}$，得

$$AC=BC\frac{\sin B}{\sin\theta}=b\frac{\sin(\theta_1+\theta)}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta_1=\frac{AB}{BC}\sin\theta=\frac{a}{b}\sin\theta$$

所以 $CD=AD-AC=a+b-b\dfrac{\sin(\theta_1+\theta)}{\sin\theta}$

$$=a+b-b\frac{\sin\theta_1\cos\theta+\cos\theta_1\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$=a+b-b\frac{\frac{a}{b}\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\sin\theta\right)^2}}{\sin\theta}$$

$$=a+b-a\cos\theta-\sqrt{b^2-a^2\sin^2\theta}$$

$$=a(1-\cos\theta)+\left(b-\sqrt{b^2-a^2\sin^2\theta}\right)$$

所以 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{CD}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{a(1-\cos\theta)+\left(b-\sqrt{b^2-a^2\sin^2\theta}\right)}{\theta^2}$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{a\cdot 2\sin^2\theta/2}{\theta^2}+\frac{a^2\sin^2\theta}{\theta^2(b+\sqrt{b^2-a^2\sin^2\theta})}\right)$$

$$=2a\frac{1}{4}+\frac{a^2}{2b}=\frac{a}{2}(1+\frac{a}{b})$$

例 8 求 $y=2e^{-x}\sin x$ $(x\geqslant 0)$与 x 轴所围图形的面积（见图 9-7）。

分析 $\sin x$ 随着 x 的增大呈现出正负交替的周期性，e^{-x} 会使该曲线与横轴迅速接近，从而存在面积（非无穷大）。

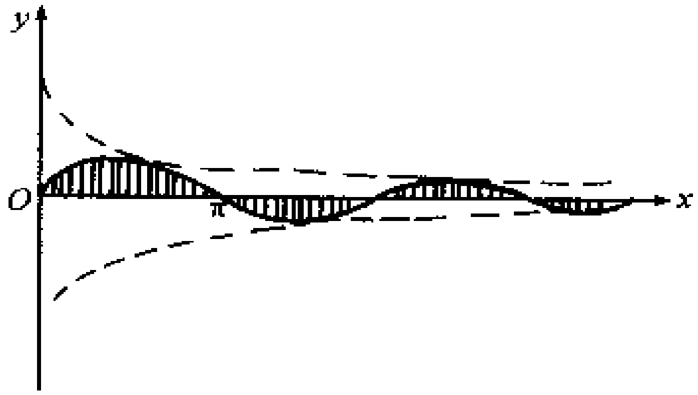


图 9-7

解 $S=\int_0^{+\infty}\left|2e^{-x}\sin x\right|dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\left|\sin x\right|dx$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}(-1)^n\sin x dx=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}[e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi-e^{-n\pi}\cos n\pi]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n\pi}\cos n\pi-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n\pi}\cos n\pi+1$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n\pi}\cos n\pi+1=\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$$

例 9 如图 9-8 所示，在离水面高为 h 的岸上，有人用绳子拉船靠岸，假定绳长 l，船位于离岸 s 处。问，当收绳速度为 v_0 (m/s) 时，船的速度 v、加速度 a 各为多少？

解 由几何关系得

$$l^2=h^2+s^2$$

两边对 t 求导，得

$$2l\frac{dl}{dt}=0+2s\frac{ds}{dt}\quad 即$$

$$l\frac{dl}{dt}=s\frac{ds}{dt}$$

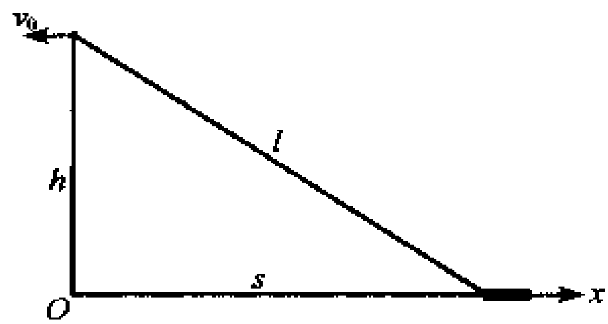


图 9-8

l 为绳长，按速度定义，dl/dt 即为拉绳速度 v_0，船只能沿 s 线在水面上行驶，因而 ds/dt 应为

船速v。将它们代入上式得

$$v=\frac{l}{s}v_0$$

消去l，得$v=\frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0$

此式中h,v_0为常量，只有s为变量，依加速度定义

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=-\frac{h^2v_0}{s^2\sqrt{h^2+s^2}}v=-\frac{h^2v_0^2}{s^3}$$

负号表明加速度方向与横轴正向相反。

9.3 自测题及提示

9.3.1 自测题

1．$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{a_n}{2^n}$ （$\{a_n\}$为 Fibonacci 数列）证明以S_n为部分和的级数收敛，并求其和。

2．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$

3．设函数$f(x)\in C[0,1]$，且$x\in[0,1]$时，有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$。证明至少存在一点$x_0\in[0,1]$，使$f(x_0)=x_0$

4．求函数

$u=\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+9}+\sqrt{x^2+y^2-6x+2y+11}$最小值。

5．表面为旋转曲面的镜子应具有怎样的形状才能使它将所有平行于其轴的光线反射到一点？求出旋转曲面的方程。

6．设年利率为i，依复利计算（所谓复利，指过一定时间，将存款所生利息自动转为本金再生利息，并逐期滚动），欲在第n年末提取n^2元（$n=1,2,\cdots$），并永远能如此进行下去，问开始至少需要存入本金多少元（最后需算出与n无关的结果）？

7．已知锐角三角形ΔABC，若取点$P(x,y)$，令$f(x,y)=|AP|+|BP|+|CP|$表示点P到三个顶点距离之和。证明$f(x,y)$取极值的点P_0处，向量$\overrightarrow{P_0A},\overrightarrow{P_0B},\overrightarrow{P_0C}$所夹的角相等。

8．如图 9-9 所示，A 和 D 分别是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 上的点，AB 和 DC 均垂直于横轴，且 $|AB|:|CD|=2:1$，$|AB|<1$，求点 B 和 C 的横坐标，使梯形 $ABCD$ 的面积最大。

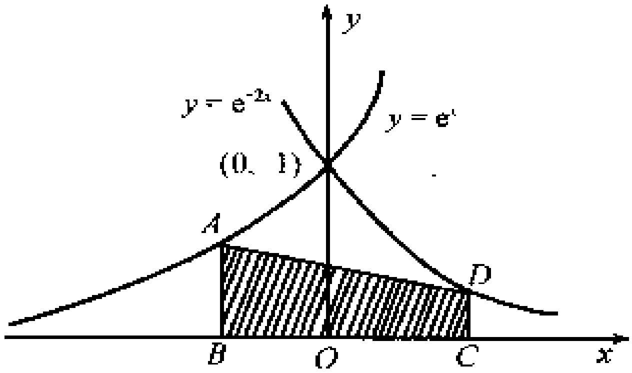


图 9-9

9．设函数 $f(x)$ 满足 $-\infty<a\leqslant f(x)\leqslant b<+\infty$，$|f(x_2)-f(x_1)|<p|x_2-x_1|$，$0<p<1$，$x_1,x_2\in[a,b]$。$\forall x_0\in[a,b]$ 作序列 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+f(x_n)\right)$，$n=0,1,2,\cdots$

证明 $\{x_n\}$ 收敛且极限 $x^*\in[a,b]$ 满足 $f(x^*)=x^*$。

10．$\{F_n\}$ 为 Fibonacci 数列，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{F_n}$ 收敛。

9.3.2　自测题提示

1．（略）

2．运用定积分的定义。

3．构造函数 $g(x)=f(x)-x$。

4．从几何上看，就是要求点 $P(x,y,0)$ 到两点 $M_1(1,2,2)$，$M_2(3,-1,-1)$ 距离之和的最小值。显然当 M_1,P,M_2 在一条直线上时，取最小值。

5．由抛物线旋转而成的抛物面就能满足题目的要求。

6．设至少存入本金 a 元，记第 n 年末提取 n^2 元后还有余款 Δ_n 元，则

$$\Delta_n=\{(a(1+i)-1^2)(1+i)-2^2-\cdots-n^2\}=a(1+i)^n-\sum_{k=1}^{n}k^2(1+i)^{n-k}$$

显然有 $\Delta_n\geqslant 0$，即 $a\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}k^2(1+i)^{-k}$，注意到 a 为永远能进行下去需要存入的最少的本金，则 $a=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$，$x=\dfrac{1}{1+i}$，求出此级数的值

即可。

7．我们在中学数学里就知道，P_0 点为费马（Fermat）点，上述三向量所夹的角均为$120°$，在这里可以用求偏导数研究极值的方法加以解决。

8．用极值方法进行求解。

9．$|x_{n+1}-x_n|=|\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))-\frac{1}{2}(x_{n-1}+f(x_{n-1}))|$

$<\cdots<(\frac{1+p}{2})^n|x_1-x_0|$，令 $\frac{1+p}{2}=q$，则$0<q<1$，上式变为

$|x_{n+1}-x_n|<q^n|x_1-x_0|$

对任意的自然数n,m，有$|x_{n+m}-x_n|<\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|$

依据柯西收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$。

10．容易证明$\frac{3}{2}F_{n-1}\leqslant F_n\leqslant 2F_{n-1}$（$n\geqslant 2$），故有

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_n}\leqslant\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n-1}$。

附录：全国高校数学竞赛及考研题精选

1．已知数列$\{x_n\}$满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$。

2．设$0<x_n<1$，$\forall n\in N$且$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

3．设函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)$内可微，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

4．设$F(x,y)=\dfrac{1}{2x}f(y-x)$及$F(1,y)=\dfrac{y^2}{2}-y+5$，任选$x_0>0$，作$x_1=F(x_0,2x_0)$，$x_2=F(x_1,2x_1)$，$\cdots$，$x_{n-1}=F(x_n,2x_n)$，$\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求它的值。

5．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$（$a\neq 0$）。

6．设函数$f(x)$的一阶导数存在，求极限$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{r}[f(t+\dfrac{r}{a})-f(t-\dfrac{r}{a})]$，其中$t,a$与$r$无关。

7．设函数$f(x)$在[0，1]上连续，且$f(x)>0$，求极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\dfrac{1}{n})f(\dfrac{2}{n})\cdots f(\dfrac{n-1}{n})f(1)}$。

8．函数$f(x)$在(a,b)内有定义，且对该区间内的任意x_1,x_2，恒有$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant(x_2-x_1)^2$，求证$f(x)$在该区间内为常数。

9．设函数$f(x)$定义在$[0,c]$上，$f'(x)$存在且单调下降，$f(0)=0$，证明对于$0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$，恒有$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$

10．设$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上可导，且$0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，证明存

在$\xi>0$，使$f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$。

11．证明：当$x<1$时，不等式$e^x\leqslant\dfrac{1}{1-x}$成立。

12．若函数$f(x,y,z)$恒满足关系式$f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$就称为 k次齐次函数。证明k次齐次函数$f(x,y,z)$满足关系式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf。$$

13．设$z=f(x,y)$为由方程$x=e^{u+v}$，$y=e^{u-v}$，$z=uv$所定义的函数，求当$u=0,v=0$时的dz,d^2z。

14．试求曲面$xyz=1$上任意点(α,β,γ)处的法线方程和切平面方程、并证明切平面与三个坐标面所围成的体积是一个常量。

15．计算二重积分$\iint\limits_D xye^{-x^2-y^2}dxdy$，其中$D$为$x^2+y^2\leqslant1$ 在第一象限的部分。

16．已知$\varphi(\pi)=1$，试确定$\varphi(x)$，使线积分$\int_A^B[\sin x-\varphi(x)]\dfrac{y}{x}dx+\varphi(x)dy$与路径无关，并求当$A,B$两点分别为$(1,0),(\pi,\pi)$时此线积分的值。

17．已知两个球的半径分别为a和b（$a>b$），且小球球心在大球球面上，求小球在大球内的那部分体积。

18．已知在$x>-1$所定义的可微函数$f(x)$满足条件

$f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$及$f(0)=1$，试求

（1）$f'(x)$；（2）证明在$x\geqslant0$时满足不等式$e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant1$。

19．求微分方程$xy'+(1-x)y=e^{2x}$（$0<x<+\infty$）满足$\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=1$的解。

20．求微分方程$y''+y=\tan x$的通解。

21．已知$y_1=e^x$是微分方程$xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=0$的一个特解，求方程的通解。

22．设a为实数，讨论下面级数

$1-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^a}+\cdots$的敛散性。

23．求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$的和。

24.已知$f(x)$在[0，1]上非负连续，且$f(0)=f(1)=0$，证明对任意的实数l（$0<l<1$），必存在$x_0\in[0,1)$，使$f(x_0)=f(x_0+l)$。

25．试用自变量变换$x=\sin t$变换方程：

$(1-x^2)y''-xy'+a^2y=0$（a为实常数）。

26．设$f(x)$在$[a,b]$上为正值连续函数，且$a_n=\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x$，则数列$\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$收敛。

27．设数列$\{a_n\}$有界，且对任意正整数$k\geqslant 2$都有$a_n\leqslant a_{n+k}$（$n=1,2,\cdots$）证明$\lim_{n\to\infty}a_n$存在。

28．求用平面$Ax+By+Cz=0$（$C\neq 0$）与椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$相交所组成的椭圆面积。

29．计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为半球面$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$（$0\leqslant z\leqslant a$）的下侧。

30．在某池塘内养鱼，该池塘最多能养1000条，在时刻t，鱼数y是t的函数$y=y(t)$，其变化率与鱼数y及$1000-y$成正比，已知在池塘内放养100条鱼，3个月后有鱼250条，求放养t个月后池塘内鱼数$y(t)$的公式。

31．设曲面S的方程$z=\sqrt{4+x^2+4y^2}$，平面Π的方程是$x+2y+2z=2$，试在曲面S上求一个点的坐标，使该点与平面Π的距离最近，并求此最近距离。

32．设$a_1<a_2<\cdots<a_n$为n个不同的实数，函数$f(x)$在$[a_1,a_n]$上有n阶导数，并满足$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$

则对每个$c\in[a_1,a_n]$，都相应存在着$\xi\in(a_1,a_n)$满足等式

$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

33．设 $f(x)$ 在[0，1]上是非负、单减的连续函数，且 $0<a<b<1$，求证 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

34．设函数 $f(x,y)$ 在包含原点的某开圆 G 内可微，且 $f(0,0)=0$，证明 $f(x,y)=x\int_0^1 \frac{\partial f(tx,ty)}{t\partial x}\mathrm{d}t+y\int_0^1 \frac{\partial f(tx,ty)}{t\partial y}\mathrm{d}t$。

35．计算三重积分 $\iiint\limits_V (x+y+z)^2\mathrm{d}v$，$V$：$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 及 $(x-2)^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 的公共部分。

36．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln n(n+1)^a(n+2)^b$，问 a,b 取何值时该级数收敛？

37．设 $\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a=\frac{1}{2}f(x)+1$，求 $f(x)$。

38．求出定义在 R 上满足函数方程 $f(x^2)=f(x)$ 的所有连续函数。

39．设函数 $f(x)$ 在[0，1]上可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$，则 $\exists x_0\in(0,1)$，使 $f'(x_0)=2x_0f(x_0)$。

40．设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有 n 阶连续导数，且 $f^{(k)}(x_0)=0$，$k=2,3,\cdots,n-1$，且 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，当 $0<|h|<\delta$ 时，$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)$，（$0<\theta<1$）

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$。

41．设函数 $\varphi(x)$ 在[a,b]上可导，并有 $\int_0^1 \varphi(tx)\mathrm{d}t=a\varphi(x)$，$a$ 为常数，求 $\varphi(x)$。

42．设函数 $\varphi(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上且 $\varphi(x)\in[a,b]$ 及 $\forall x,y\in[a,b]$ 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant q|x-y|$，其中 $0<q<1$。则存在惟一一点 x_0，使 $\varphi(x_0)=x_0$。

43．$f(x)\in C(0,+\infty)$，且 $\forall x,y>0$，有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，求

函数 $f(x)$。

44．$f(x)\in C(0,+\infty)$，且有 $f(xy)=f(x)f(y)$，求函数 $f(x)$。

45．设函数 $f(x)$ 对一切 $u\neq v$，均有

$\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}=\alpha f'(u)+\beta f'(v)$，其中 $\alpha,\beta>0$，$\alpha+\beta=1$，求 $f(x)$ 的表达式。

46．设 $f(x)\in C[a,b]$，$\forall u,v\in[a,b]$，有

$\dfrac{1}{v-u}\int_u^v f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$，求 $f(x)$ 的通解。

47．设 $f(x)\in C[a,b]$，$\forall u,v\in[a,b]$，有

$\dfrac{1}{v-u}\int_u^v f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2f(u)f(v)}{f(u)+f(v)}$，求 $f(x)$ 的通解。

48．$a>0,x_0>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

49．$0\leqslant a\leqslant 1, y_1=\dfrac{a}{2}, y_2=\dfrac{a}{2}+\dfrac{y_1^2}{2}, y_{n+1}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{y_n^2}{2}$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。